INSTITUCIÓN EDUCATIVA EL RECUERDO
GUÍA DE TRABAJO MATEMÁTICAS GRADO 10

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS

Durante el periodo de las semanas comprendidas entre el 16 al 27 de marzo, deberás desarrollar las siguientes temáticas:

1. **Orden en el conjunto de los números reales y desigualdades:** Ubica el tema en la página 18 y 19 del texto guía. Deberás anotar en tu cuaderno de apuntes los contenidos desarrollados iniciando por el ejemplo de la sección *analiza* y su resolución en la sección *conoce.* Luego continua con el concepto resaltado en color rosa y demás información debajo de él, en el orden que esta consignado en el libro hasta terminar con **las propiedades de las desigualdades** de la página 19 y su respectivo ejemplo.
   Resuelve en su totalidad la actividad de aprendizaje y la evaluación del aprendizaje de la página 19 en tu cuaderno.

2. **Valor absoluto:** Ubica el tema en la página 20 del texto guía. Deberás anotar en tu cuaderno de apuntes los contenidos desarrollados iniciando por el ejemplo de la sección *analiza* y su resolución en la sección *conoce.* Luego continua con el concepto resaltado en color rosa. Continúa escribiendo las **propiedades del valor absoluto** y posteriormente la temática **Distancia entre dos puntos**.
   Resuelve en su totalidad la actividad de aprendizaje y la evaluación del aprendizaje de la página 19 en tu cuaderno.

Anexo copias páginas 18 y 19

ASIGNATURA: ESTADÍSTICA

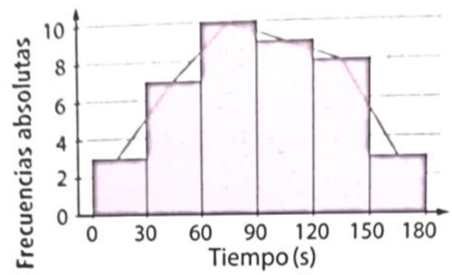
Durante el periodo de las semanas comprendidas entre el 16 al 27 de marzo, deberás desarrollar las siguientes temáticas. Escribe en el cuaderno los siguientes conceptos y en el mismo desarrolla las actividades y/o talleres propuestos:

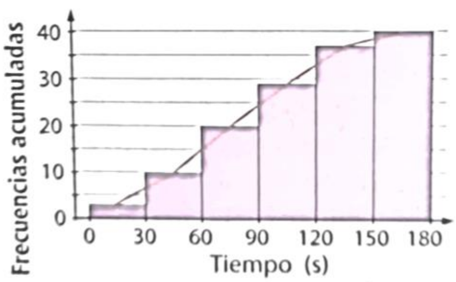
Representación gráfica de variable continua: Cuando las variables son continuas, utilizamos como diagramas diferenciales los histogramas y los polígonos de frecuencias.

Histogramas: Para construirlo se escriben sobre el eje de las abscisas los límites de las clases. Sobre dicho eje, se construyen rectángulos que tienen por base la amplitud del intervalo y, por altura, la frecuencia absoluta.

Polígono de frecuencias: Se construye al unir con segmentos los puntos medios de las bases superiores de los rectángulos del histograma y muestra la tendencia promedio de las clases.

Ejemplo: En la primera figura se muestra el histograma y el polígono de frecuencias correspondientes a las frecuencias absolutas de la tabla 2. En la segunda figura se presenta el histograma y la ojiva (polígono de frecuencias) del mismo estudio correspondiente a las frecuencias absolutas acumuladas.





Actividades de aprendizaje

- Representa en tu cuaderno el histograma resultante de la actividad de profundización anterior (Inciso 1 del taller de la página 217 del texto guía)
- Resolver el inciso 2 y la Evaluación del aprendizaje del taller de la página 217.
- Toma la última factura de la luz de tu casa e interpreta el diagrama de barras que en él se presenta. Compara el recibo con los dos meses anteriores y escribe 3 conclusiones acerca de lo observado.

MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL:

Escribe en tu cuaderno los conceptos de las distintas medidas de tendencia central relacionados en la página 218 del texto guía y el ejemplo 1 de la página 219.

Resuelve los incisos 1, 2, 4, 5, 8, 10, 11, 13 y 14 de la actividad de aprendizaje de la página 220 y 221 en tu cuaderno.

Anexo copias página 218, 219, 220 y 221

5 Orden en el conjunto de los números reales y desigualdades

Saberes previos

Escribe tres números mayores que -1 pero menores que 1? ¿Existe más de un número que cumpla esa condición?

Analiza

Las edades de Mariana y Juan suman un número menor que 86 años. Si Mariana tiene 20 años menos que Juan, ¿qué edad puede tener Mariana?

Conoce

En la situación planteada se propone establecer relaciones de orden entre las edades. Como la edad de las dos personas es menor que 86 años; se tiene:

$$\text{Edad de Mariana} + \text{Edad de Juan} < 86 \text{ años}$$

También se sabe que Mariana es 20 años menor que Juan, esta relación se puede plantear así:

$$\text{Edad de Mariana} + 20 \text{ años} = \text{Edad de Juan}$$

Si se escribe la edad de Juan en términos de la edad de Mariana, es posible plantear la siguiente expresión:

$$2\,(\text{Edad de Mariana}) + 20 \text{ años} < 86 \text{ años}$$

$$2\,(\text{Edad de Mariana}) < 86 \text{ años} - 20 \text{ años}$$

$$\text{Edad de Mariana} < 33 \text{ años}$$

Así, se puede afirmar que la edad de Mariana puede ser cualquier número menor que 33 y se cumple que la edad de Juan se encuentra a la derecha de la de Mariana, en la recta numérica.

De manera general, los números reales satisfacen la **propiedad de la tricotomía** que indica que dados dos números reales, se satisface una y solamente una de las siguientes condiciones:

$a < b$ (es decir, b está a la derecha de a).

$a > b$ (es decir, a está a la derecha de b)

$a = b$ (que indica que a y b se ubican en el mismo punto de la recta real).

Otra propiedad de orden que cumplen los números reales establece que si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$. Esta se conoce como **propiedad transitiva**.

Todas las anteriores relaciones entre números reales están determinadas por **desigualdades** las cuales expresan que dos expresiones no son iguales.

Las desigualdades $a < b$ y $a > b$ se llaman **desigualdades estrictas.**

Existen otras desigualdades como $a \leqslant b$ que significa que a es menor o igual que b y $a \geqslant b$ que significa que a es mayor o igual que b.

Cada una de estas últimas desigualdades constituyen una **relación de orden** por ser:

- Reflexiva: $a \leqslant a$ para todo $a \in \mathbb{R}$.
- Antisimétrica: si $a \leqslant b$ y $b \leqslant a$, entonces $a = b$.
- Transitiva: si $a \leqslant b$ y $b \leqslant c$, entonces $a \leqslant c$.

5.1 Propiedades de las desigualdades

- Si se adiciona o se sustrae en ambos miembros de una desigualdad el mismo número real, no varía el sentido de la misma.

  Esto es si $a < b$ y c es cualquier número real: $a + c < b + c$ y $a - c < b - c$.
- Si se multiplican o dividen ambos miembros de una desigualdad por cualquier número real positivo, no cambia su sentido.

  Simbólicamente: si $a < b$ y $c > 0$, entonces $a \cdot c < b \cdot c$ y $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.
- Si se multiplican o dividen ambos miembros de una desigualdad por cualquier número negativo, cambia el sentido de la misma.

  Simbólicamente, si $a < b$ y $c < 0$, entonces $a \cdot c > b \cdot c$ y $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

Ejemplo 1

Como $3 < 4$, entonces al adicionar 5 a ambos lados de la desigualdad, se tiene que $3 + 5 < 4 + 5$.

Si se sustrae 5 a ambos lados de la desigualdad inicial, se cumple que $3 - 5 < 4 - 5$.

Si se multiplica y se divide a ambos lados de la desigualdad $3 < 4$ por y entre 7, su sentido se mantiene:

$$3 \cdot 7 < 4 \cdot 7 \text{ y } \frac{3}{7} < \frac{4}{7}.$$

Si se multiplica y se divide a ambos lados de la desigualdad $3 < 4$ por y entre -5, su sentido cambia

$$3 \cdot (-5) > 4 \cdot (-5) \text{ y } -\frac{3}{5} > -\frac{4}{5}.$$

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Si $0 < m < n$, asigna valores a m y n para verificar las desigualdades.

a. $(m + n)^2 > m^2 + n^2$ b. $(m - n)^2 < (m + n)^2$

Razonamiento

2 Si $a > b$, indica si son verdaderas (V) o falsas (F) las desigualdades.

a. $1 - b > 1 - a + b$ b. $a > -ab > b$

c. $-a + 0 > -b + 0$

3 1. Escribe el signo $<$, $>$, $\leqslant$ o $\geqslant$, según corresponda.

a. Si $a < b$, entonces $a - 5 \,\square\, b - 5$.

b. Si $\frac{3}{5} \,\square\, t$, entonces $-\frac{6}{5} \leqslant -2t$.

c. Si $h > 0$, entonces $h + 3{,}6 \,\square\, 3{,}6$.

d. Si $n - 1 \geqslant 3$, entonces $-n + 1 \,\square\, -3$.

Evaluación del aprendizaje

i Para $m = \frac{3}{2}$ y $n = 5$ verifica si se cumplen las desigualdades dadas.

a. $\frac{1}{m} > \frac{1}{n}$ b. $\frac{m}{n} - n < 0$ c. $\frac{m + n}{2} > 3$

ii En cada caso, determina si $a > b$, $a < b$ o $a = b$. Adiciona -3 a cada una de las desigualdades y explica si se conserva el sentido de las nuevas desigualdades. Luego, divide cada desigualdad entre -1 y decide el sentido de las nuevas desigualdades.

a. $a = \frac{3}{5}; b = \frac{12}{20}$ b. $a = \frac{2}{3\sqrt{5}}; b = \frac{5}{3\sqrt{5}}$

c. $a = \frac{\sqrt{3}}{6}; b = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ d. $a = \frac{1}{8}; b = \frac{3}{5}$

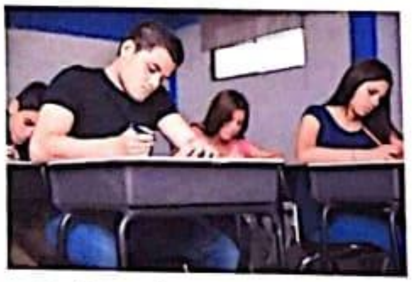
4 Medidas de tendencia central

Saberes previos

En una publicación nacional se lee: "En 7 puntos mejoró el promedio de las pruebas Saber 11". ¿Cómo se puede interpretar esta información?

Analiza

El Ministerio de Educación publicó los resultados obtenidos por los colegios en la última prueba ICFES Saber 11. En el colegio San Esteban, el promedio de los estudiantes en la prueba de razonamiento cualitativo fue de 75,8.



- ¿Qué significa este resultado?

Recuerda

Para datos no agrupados las medidas de tendencia central se definen así:

La **media** o **promedio** es el cociente de la suma de todos los valores entre el número de datos.

La **moda** es el dato con la mayor frecuencia.

La **mediana** representa el valor de la variable de posición central en un conjunto de datos ordenados.

Conoce

La palabra *promedio* es muy usada en situaciones cotidianas, en el caso del puntaje de la prueba de matemáticas, se puede afirmar que al sumar los resultados de cada uno de los estudiantes y dividirlos entre el total de ellos, aparece el valor 75,8. El cual se interpreta de la siguiente manera: si todos los estudiantes hubiesen obtenido el mismo puntaje éste habría sido 75,8.

Se conocen como **medidas de tendencia central o de centralización** los parámetros que indican el valor hacia el que tienden a ubicarse los datos de una distribución. Las medidas de tendencia central son la **media aritmética**, **la moda** y la **mediana**.

Cuando en un estudio estadístico existen muchos datos que analizar, conviene agruparlos en **intervalos o clases**.

4.1 Media para datos agrupados

La **media** para datos agrupados $\bar{x}$ se calcula sumando todos los productos de la variable o de la marca clase, dependiendo si son discretas o continuas, con la frecuencia absoluta respectiva y dividiendo ese resultado entre el número total de datos N: $\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{N}$. En este caso x_i será el valor de la variable si es discreta o la marca de clase si es continua.

4.2 Moda para datos agrupados

La **moda** M_o para datos agrupados es el valor que representa la mayor frecuencia absoluta. En las tablas de frecuencias con datos agrupados por clases se habla de **intervalo modal** y se calcula así:

$$Mo = L_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{(f_i - f_{i-1}) + (f_i - f_{i+1})} \cdot A \text{ donde:}$$

L_i es el límite inferior de la clase modal (Intervalo con la más alta frecuencia).

A es la amplitud de la clase o intervalo.

f_{i-1} es la frecuencia absoluta inmediatamente inferior a la clase modal.

f_{i+1} es la frecuencia absoluta inmediatamente posterior a la clase modal.

4.3 Mediana para datos agrupados

La **mediana** M_e para datos discretos agrupados se encuentra ubicando la frecuencia acumulada que contiene al dato que está en la mitad de los datos, cuando éstos se organizan de menor a mayor. Cuando los datos son continuos, se halla en el intervalo donde la frecuencia acumulada llega hasta la mitad de la suma de las frecuencias absolutas así:

$M_e = L_i + \frac{\left(\frac{N}{2} - F_{i-1}\right)}{f_i} \cdot A$ con L_i el límite inferior del intervalo que contiene a $\frac{N}{2}$, siendo N el total de los datos, F_{i-1} la frecuencia acumulada anterior a la clase mediana, f_i la frecuencia absoluta del intervalo mediano y A la amplitud del intervalo.

Ejemplo 1

El tiempo, en segundos, que tardan en conectarse los usuarios de una determinada página web, a lo largo de un día, viene dado por la Tabla 6.9.

Tiempo en segundos	[0, 30)	[30, 60)	60, 90)	[90, 120)	[120, 150)	[150, 180)
Número de usuarios	3	7	10	9	8	3

Tabla 6.9

Para hallar las medidas de tendencia central se ordenan los datos en la Tabla 6.10, añadiendo las marcas de clase (los puntos medios de cada intervalo, por ser una variable continua), las frecuencias absolutas acumuladas y el producto de la marca de clase por la frecuencia absoluta.

(L_i, L_s)	x_i	f_i	F_i	$x_i f_i$
[0, 30)	15	3	3	45
[30, 60)	45	7	10	315
[60, 90)	75	10	20	750
[90, 120)	105	9	29	945
[120, 150)	135	8	37	1 080
[150, 180)	165	3	40	495
Total		40		3 630

Tabla 6.10

La **media** para estos datos es: $\overline{x} = \dfrac{\sum x_i f_i}{N} = \dfrac{3\,630}{40} = 90{,}75$ s.

El promedio en esta situación indica que los 40 usuarios tardan aproximadamente 90,75 s en conectarse a la página web.

Para hallar la **moda** se identifica el intervalo con la más alta frecuencia, en este caso es [60, 90] y se toma su límite inferior $L_i = 60$.

$A = 30$ pues es la amplitud de cada intervalo.

$f_{i-1} = 7$ que corresponde a la frecuencia absoluta inmediatamente inferior a la clase modal o premodal.

$f_{i+1} = 9$ que es la frecuencia absoluta inmediatamente posterior a la clase modal o postmodal.

Así: $Mo = L_i + \dfrac{f_i - f_{i-1}}{(f_i - f_{i-1}) + (f_i - f_{i+1})} \cdot A =$

$$60 + \frac{10 - 7}{(10 - 7) + (10 - 9)} \cdot 30 = 60 + \frac{90}{4} = 82{,}5.$$

Para determinar la **mediana** se halla el intervalo donde la frecuencia acumulada contenga a $\dfrac{N}{2} = \dfrac{40}{2} = 20$. Como dicho intervalo es [60, 90], entonces $L_i = 60$.

De otro lado, $F_{i-1} = 10$ y $f_i = 10$, así que:

$$M_e = 60 + \frac{20 - 10}{10} \cdot 30 = 60 + \frac{10}{10} \cdot 30 = 90.$$

La mediana indica que el 50% de los usuarios encuestados tardan menos de 90 s en conectarse a la página web y el otro 50% supera ese tiempo.

Actividades de aprendizaje

Modelación

1 Observa la Tabla 6.11 que muestra las medidas, en centímetros, de algunas cintas decorativas indígenas.

Medida (cm)	[100, 105)	[105, 110)	[110, 115)	[115, 120)	[120, 125)
Número de cintas	4	9	12	10	3

Tabla 6.11

Halla la media, la moda y la mediana.

Ejercitación

2 Completa los datos que faltan en la Tabla 6.12, donde f_i, F_i y h_i representan, respectivamente, las frecuencias absoluta, absoluta acumulada y relativa.

x_i	f_i	F_i	h_i
1	4		0,08
2	4		
3		16	0,16
4	7		0,14
5	5	28	
6		38	
7	7	45	
8			

Tabla 6.12

a. Halla la media aritmética y la moda de esta distribución.

b. Calcula la mediana.

Modelación

3 Analiza la Tabla 6.13 que muestra los ingresos (en miles de pesos), de un grupo de personas.

Ingresos mensuales	Frecuencia
[0, 1000)	35
[1000, 1100)	70
[1100, 1400)	70
[1400, 1600)	90
[1600, 1900)	85
[1900, 2400)	64

Tabla 6.13

a. Construye el histograma de frecuencias relativas y el polígono de frecuencias relativas.

b. Halla la media, la mediana y la moda de la distribución.

Razonamiento

4 Calcula la mediana de los siguientes números teniendo en cuenta que la media es 4. x, 3, $4x - 3$, $x + 4$, -16, 9 y $x - 4$.

5 Halla la media en la siguiente situación: a un conjunto de datos de cinco números, cuya media es 7,31, se le añaden los números 4,47 y 10,15.

6 Un conjunto de cinco números naturales distintos tiene una mediana de 20 y una media de 17. ¿Cuál es el mayor de esos números?

Ejercitación

7 Calcula la media, la mediana y la moda de cada conjunto de datos.

a. {2, 4, 9, 2, 4, 6, 3, 9, 2, 6}

b. {1, 2, 2, 4, 5, 8, 6, 3, 2, 7, 9, 5}

c. {6, 5, 8, 7, 6, 2, 3, 3, 4, 7, 9, 10}

8 Observa las tablas de registro de las ventas semanales de una cierta marca de ropa en dos almacenes de la ciudad de Yopal.

Almacén A	
Día	**Cantidad**
Lunes	15
Martes	21
Miércoles	13
Jueves	15
Viernes	18

Tabla 6.14

Almacén B	
Día	**Cantidad**
Lunes	25
Martes	13
Miércoles	8
Jueves	9
Viernes	15

Tabla 6.15

a. Establece la media de ventas de esa marca en cada almacén.

b. Si se quiere cerrar el almacén con menos promedio de ventas de esa marca, ¿cuál debería escogerse?

Razonamiento

9 Construye una distribución de frecuencias que cumpla con las características pedidas en cada caso.

a. Que la mediana sea mayor que la moda.

b. Que la moda sea mayor que la mediana.

c. Que las tres medidas sean iguales.

10 Halla el valor de t en cada conjunto de datos para que se verifique el valor de la medida de tendencia central.

a. $\{87, 73, 89, 92, t\}$; media aritmética $= 85$

b. $\{1, 2, 2, 4, 4, 8, 3, 3, t, 7, 9, 5\}$; moda $= 4$

c. $\{6, t, 13, 5, 6, 8, 2, 9, 7, 12\}$; mediana $= 7{,}5$

Resolución de problemas

11 Por cada \$ 20 que recibe una familia, \$ 9 los destina a vivienda, \$ 6 a alimentación y \$ 5 a otros gastos.

a. Dibuja el gráfico de sectores que refleje esa distribución.

b. En el último año, los precios de los conceptos mencionados subieron 20%, 5% y 6%, respectivamente. ¿Cuál ha sido, para esta familia, el porcentaje de aumento anual del total de los gastos? Utiliza la media ponderada.

12 El diagrama de barras de la Figura 6.7 muestra las calificaciones obtenidas por 50 estudiantes.

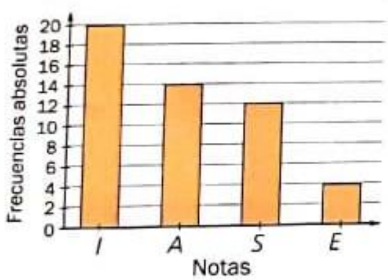


Figura 6.7

Construye el histograma correspondiente a las calificaciones numéricas y calcula la calificación media, teniendo en cuenta la Tabla 6.16.

Insuficiente	Aceptable	Sobresaliente	Excelente
[0, 5)	[5, 7)	[7, 9)	[9, 10)

Tabla 6.16

13 En un colegio se realizó un concurso entre los estudiantes de los tres cursos de décimo grado. El puntaje medio del grupo A fue 5,7 puntos, el del grupo B fue 5,6, y la de los estudiantes del grupo C fue 5,5. En el grupo A hay 30 estudiantes y se sabe que en el grupo C hay 5 estudiantes más que en el grupo B.

Si el puntaje medio de todos los estudiantes de décimo fue 5,6 puntos, ¿cuántos estudiantes de décimo hay en la institución?

14 La Tabla 6.17 muestra la cantidad de estudiantes que ingresaron a estudiar economía a una universidad de Neiva.

Año	Cantidad
1996	45
1997	49
1998	68
1999	78
2000	96

Tabla 6.17

¿Se pueden hallar todas las medidas de tendencia central?

Evaluación del aprendizaje

La Tabla 6.18 resume la información de la edad a la que un grupo de mujeres tuvo su primer hijo.

Intervalo	Frecuencia
[15, 20)	17
[20, 25)	13
[25, 30)	21
[30, 35)	29
[35, 40)	41

Tabla 6.18

Halla las medidas de tendencia central y escribe la interpretación de cada una.

Educación ambiental

De acuerdo con la tabla, ¿cuánto ha aumentado, en promedio, la temperatura en el sitio donde se tomó la información?

Mes	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun
ºC	1,8	2,0	1,8	2,1	2,1	1,9