	INSTITUCIÓN EDUCATIVA "EL RECUERDO" Resolución de Aprobación de Carácter Oficial No. 0143 de 2017 en los niveles de Preescolar, Básica y Media Académica DANE. 123001800064 NIT. 901048820-9	Fecha

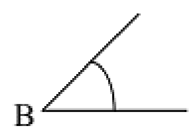
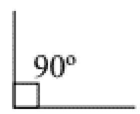
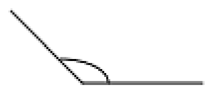
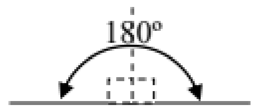
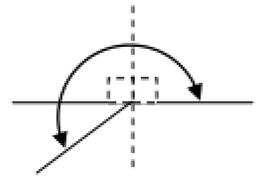
Guía de trabajo del área: Matemáticas – Guía 3	**Grado:** 9A-9B
Nombre del docente 9A: Ureliano Peñata **email:** upenataieelrecuerdo@gmail.com **Celular:** 313 5276620	
Nombre del docente 9B: Rosa Cano **email:** rcanoieelrecuerdo@gmail.com **Celular:** 3105679770	

TEMAS Y/O SABER	DBA (APRENDIZAJES)
✓ **Definición de ángulo** ✓ **Medida de ángulos** ✓ **Razones trigonométricas**	**DBA 5:** Explora y describe las propiedades de los lugares geométricos y de sus transformaciones a partir de diferentes representaciones.

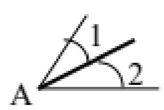
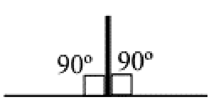
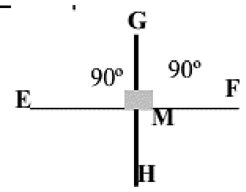
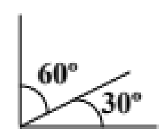
*******Escribe el contenido de la guía en tu cuaderno*******

RECORDEMOS

Clases de ángulos según su medida:

Agudo	Recto	Obtuso	Llano	Ángulo cóncavo o entrante
Mide menos de 90°	Mide 90°	Es mayor que 90º pero menor de 180º	Mide 180°	Es mayor que 180º pero menor que 360º
				

Otros asuntos sobre ángulos

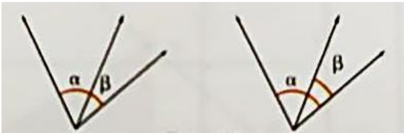
Recta bisectriz	Recta perpendicular	Mediatriz	Ángulos complementarios	Ángulos suplementarios
Divide al ángulo en dos partes iguales	Corta a una recta y la divide en dos ángulos rectos.	Si una recta biseca (corta) a un segmento, y además, es perpendicular a él se llama mediatriz. Mediatriz es, la perpendicular a un segmento en su punto medio.	Son los que sumados dan 90º.	Son los ángulos que sumados dan 180º.
 <1 = < 2			 60º + 30º = 90º	 140º + 40º = 180º

"ASESORIA: si tiene alguna duda o no entiende algo sobre esta guía, comuníquese con el número que aparece en la parte de arriba"

TEMÁTICA 1

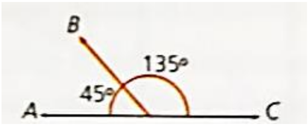
Los ángulos suplementarios también pueden ser:

Ángulos adyacentes: un par de ángulos son adyacentes cuando están en el mismo plano, tienen un vértice común, pero no tienen puntos interiores comunes.



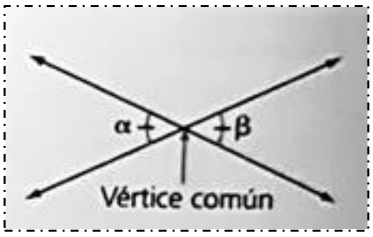
Ejemplo: en la figura se observan dos pares de ángulos, en ambos casos representados por $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\beta}$. en el caso de la izquierda vemos que $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\beta}$ son ángulos consecutivos que comparten un lado y el vértice, estos son ángulos adyacentes puesto que no tienen puntos comunes.
Por otro lado, en el ejemplo de la derecha vemos que el ángulo $\boldsymbol{\beta}$ está contenido en el ángulo $\boldsymbol{\alpha}$, y por tanto como tienen puntos interiores comunes, son ángulos consecutivos pero no son adyacentes.

Ángulos adyacentes par lineal son aquellos que tienen el vértice y un rayo en común, al tiempo que sus otros dos lados son rayos opuestos. De allí resulta que los ángulos adyacentes par lineal sean a la vez adyacentes y suplementarios ya que al sumar sus medidas completan 180° sin poseer ningún punto interior en común.



Ejemplo: Los ángulos de la figura son adyacentes par lineal porque comparten el vértice, un lado y porque 45° + 135° = 180°.

<u>Ángulos congruentes</u>: Dos ángulos son congruentes si tienen la misma medida.
Los ángulos ***α*** y ***β*** tiene el mismo vértice, y los lados de uno de ellos son rayos opuestos a los del otro (ver figura). Se dice que ***α*** y ***β*** son **ángulos opuestos por el vértice.**



MEDIDAS DE ÁNGULOS

Existen diversas formas de medir un ángulo, a continuación, estudiaremos las formas más utilizadas como son el sistema sexagesimal y el radián, entre otras menos usadas.

1.1 Sistema sexagesimal

La medida del ángulo de giro de la brújula está expresada de manera precisa en el sistema sexagesimal. En este sistema, un ángulo de rotación completo se divide en 360 ángulos iguales. Cada ángulo mide un **grado** (1°) sexagesimal. Para medir ángulos más pequeños se utilizan los **minutos** (′) y los **segundos** (″). Si 1° se divide en 60 ángulos iguales, cada uno de ellos equivale a 1′; y si 1′ se divide en 60 ángulos iguales, cada uno de ellos equivale a 1″. Así, la medida expresada es de 52 grados, 24 minutos y 18 segundos.

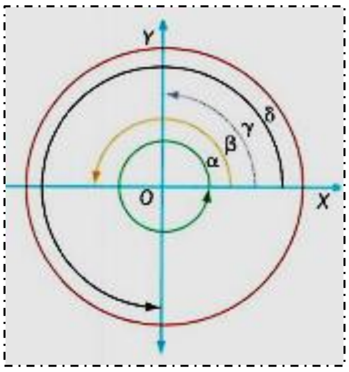
Analiza

Un viajero observa en su brújula que debe girar 52° 24′ 18″ al oriente para llegar a su destino.

- ¿En qué sistema de unidades está expresada la medida de este ángulo?

EL GRADO

Para hallar la medida de la amplitud angular de α, β, ϒ y δ, se fija como primer lado de los ángulos el semieje positivo de las abscisas (eje x). Si el sentido de giro es contrario al de las agujas del reloj, la medida de los ángulos es un número positivo; si el sentido es el mismo al de las manecillas, es un número negativo.



Por lo tanto, la medida de los ángulos α, β, ϒ y δ son: 360°, 180°, 90° y 270°, respectivamente.

El grado es la medida de amplitud angular de cada uno de los ángulos que resultan al dividir el ángulo recto en 90 partes iguales. Su símbolo es °.
Un grado se divide en 60 **minutos:** 1° = 60’
Un minuto se divide en 60 **segundos:** 1’ = 60’’

Ejemplo

Para expresar el ángulo de 7225° como la suma de un número entero de vueltas y un ángulo menor que 360°, se divide por 360°, de modo que el cociente es el número de vueltas y el residuo es el ángulo buscado.

$$7225° = 20 \cdot 360° + 25°$$

EL RADIAN

El **radián** es la medida de la amplitud angular del ángulo central de una circunferencia cuyo arco tiene la misma longitud que el radio. Su símbolo es **rad**.

Como el ángulo de un giro completo abarca toda la circunferencia, y la longitud de una circunferencia con radio r es $2\pi r$, este ángulo mide 2π rad. Por lo tanto, se tiene la equivalencia:

$$360° = 2\pi \text{ rad} \Rightarrow 180° = \pi \text{ rad}$$

El radián no depende del radio de la circunferencia que se considere, ya que todos los sectores circulares determinados por un mismo ángulo son semejantes entre sí (Figura 2.37).

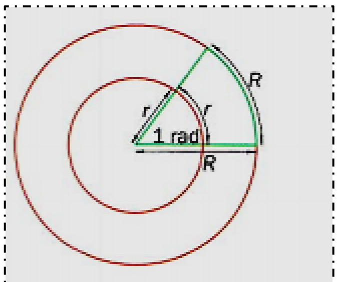


Figura 2.37

Los ángulos que determinan arcos de mayor longitud que la de la circunferencia pueden expresarse como la suma de un número entero de vueltas y un ángulo menor que 360° o 2π radianes.

CONVERSIÓN ENTRE UNIDADES DE MEDIDA DE ÁNGULOS

Para hacer conversiones de medidas de ángulos entre los sistemas sexagesimal y de radianes, se parte de la equivalencia $360° = 2\pi$ rad.

Ejemplo:

Para expresar 2,4 rad en grados, se plantea la regla de tres:

$$\frac{\pi \text{ rad}}{180°} = \frac{2{,}4 \text{ rad}}{x} \Rightarrow x = \frac{180° \cdot 2{,}4 \text{ rad}}{\pi \text{ rad}} = \frac{432°}{\pi} \; 137{,}5099°$$

Para expresar 125° en radianes, se plantea la regla de tres:

$$\frac{2\pi \text{ rad}}{360°} = \frac{x}{125°} \Rightarrow x = \frac{125° \cdot 2\pi \text{ rad}}{360°} = \frac{25\pi}{36} \text{ rad}$$

ACTIVIDAD PRACTIQUEMOS No. 1

Responde y envía tus respuestas al correo electrónico:

Comunicación

1 Indica a qué ángulo menor que 360° equivalen los ángulos que se muestran a continuación.

a. 720° b. 1 050° c. 990°
d. 840° e. 600° f. 1 260°

Ejercitación

2 Indica la medida en radianes de los siguientes ángulos dados en grados.

a. 0° b. −45° c. −60°
d. 120° e. 30° f. −240°
g. 90° h. −270° i. 135°
j. −300° k. 36° l. −20°
m. 216° n. −160° ñ. 324°

3 Expresa la medida en radianes del ángulo α, menor que 360°, al que equivalen estos ángulos.

a. 480° b. −1 235° c. 930° d. 1 440°

4 Expresa en grados los siguientes ángulos.

a. $-\frac{\pi}{6}$ rad b. 0,8 rad c. $\frac{3\pi}{4}$ rad
d. -3π rad e. 4π rad f. $-\frac{9\pi}{4}$ rad
g. $-\frac{7\pi}{9}$ rad h. $\frac{13\pi}{6}$ rad i. $-\frac{5\pi}{12}$ rad
j. $-\frac{11\pi}{5}$ rad k. $-\frac{\pi}{5}$ rad l. $\frac{5\pi}{6}$ rad

Razonamiento

5 Un ángulo en posición normal tiene su vértice en el origen de coordenadas, su lado inicial coincide con el semieje positivo de las abscisas y su lado final se ubica en cualquier cuadrante.

Representa cada ángulo en posición normal e identifica sus elementos.

a. Su lado final debe estar en el primer cuadrante.
b. Su rotación debe ser de media vuelta en sentido contrario al de las manecillas del reloj.
c. Su lado final debe coincidir con el semieje positivo de las ordenadas.

Resolución de problemas

6 Dos ángulos a y b son complementarios si la suma de sus medidas es igual a la medida de un ángulo recto, es decir, $a + b = 90°$. ¿Cuál es la medida, en radianes y en grados, del ángulo complementario en cada caso?

a. 15° b. 38° c. $\frac{5\pi}{12}$ d. $\frac{13\pi}{36}$

Evaluación del aprendizaje

Calcula el ángulo equivalente, en sentido positivo, a cada uno de los siguientes ángulos. Utiliza la misma unidad de medida en que vienen dados.

a. −330° b. $-\frac{3\pi}{4}$ rad
c. −120° d. $-\frac{\pi}{2}$ rad

TEMÁTICA 2

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

SABERES PREVIOS

Si tienes conectividad observa el siguiente video:
https://contenidosparaaprender.colombiaaprende.edu.co/G_10/M/M_G10_U02_L03/M_G10_U02_L03_01_01_01.html
Después de ver el video, contesta las siguientes preguntas en tu cuaderno:

¿Qué estudia la trigonometría?

¿Quién es llamado el padre de la trigonometría? Haga una breve biografía referenciando otros personajes construyendo una línea de tiempo.

En general, ¿para qué se usa la trigonometría y en qué áreas de la ciencia se aplica?

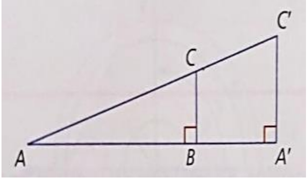
Para determinar las razones que hay entre las medidas de los lados del $\triangle ABC$ y del $\triangle AA'C'$ en relación con el ángulo A, se tiene en cuenta que:

- Los dos triángulos comparten el ángulo A.
- El $\measuredangle B$ y el $\measuredangle A'$ por ser rectos, son congruentes; esto es, $\measuredangle B \cong \measuredangle A'$.
- Por lo anterior, los triángulos ABC y $AA'C'$ son semejantes, ya que tienen dos ángulos correspondientes congruentes. Esto se denota $\triangle ABC \sim \triangle AA'C'$ y se conoce como el criterio de semejanza Ángulo-Ángulo. En consecuencia, se pueden establecer las siguientes relaciones:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{A'C'}{AC'} \qquad \frac{AB}{AC} = \frac{AA'}{AC'} \qquad \frac{BC}{AB} = \frac{A'C'}{AA'}$$

A estas razones iguales se les denominan *seno del ángulo A*, *coseno del ángulo A* y *tangente del ángulo A*, respectivamente, y reciben el nombre de **razones trigonométricas**.

Observa la figura:
¿Qué razones se pueden establecer entre las medidas de los lados de los triángulos que se forman en relación con el ángulo A?



Las **razones trigonométricas** del ángulo α de la Figura 2.39 son:

$$\textbf{seno de } \alpha = \frac{\text{longitud del cateto opuesto a } \alpha}{\text{longitud de la hipotenusa}} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\textbf{coseno de } \alpha = \frac{\text{longitud del cateto adyacente a } \alpha}{\text{longitud de la hipotenusa}} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{b}{c}$$

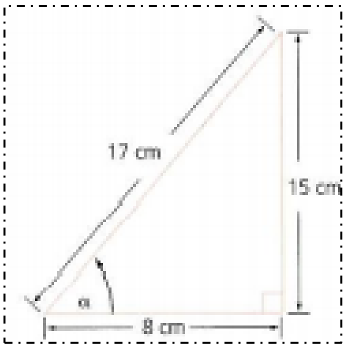
$$\textbf{tangente de } \alpha = \frac{\text{longitud del cateto opuesto a } \alpha}{\text{longitud del cateto adyacente a } \alpha} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{a}{b}$$

Ejemplo 2

Las razones trigonométricas del ángulo agudo de mayor amplitud de un triángulo rectángulo cuyos lados miden 8 cm, 15 cm y 17 cm, respectivamente (Figura 2.41), son:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{15}{17} \qquad \cos\alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{8}{17}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{15}{8}$$



Ejemplo 1

Los triángulos ABC y $A'B'C'$ de la Figura 2.40 son semejantes, ya que son triángulos rectángulos y tienen los ángulos α y α' congruentes; por consiguiente, los lados correspondientes son proporcionales.

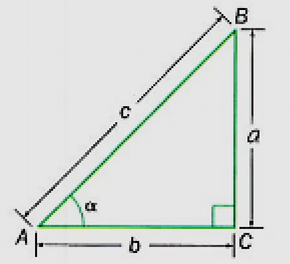


Figura 2.39

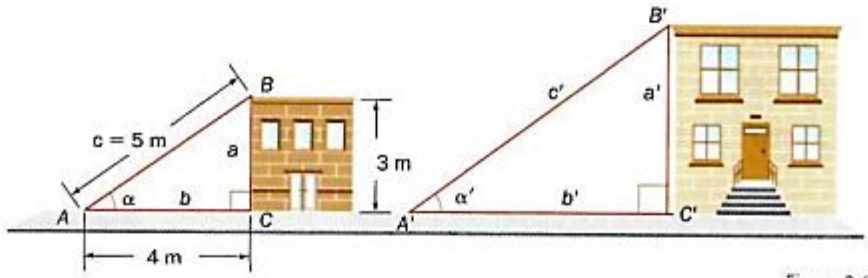


Figura 2.40

Las razones trigonométricas de los ángulos α y α' son:

seno: $\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'} = \frac{3}{5}$

coseno: $\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'} = \frac{4}{5}$

tangente: $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{3}{4}$

ACTIVIDAD PRACTIQUEMOS No. 2

Responde y envía tus respuestas al correo electrónico:

1. Halla las razones trigonométricas del ángulo α en cada triángulo rectángulo.

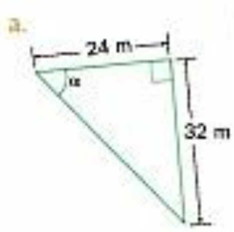


Figura 2.42

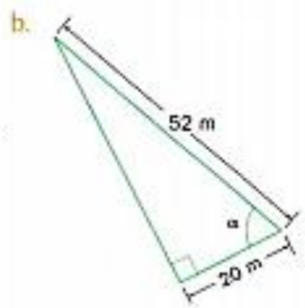


Figura 2.43

2. Calcula las razones trigonométricas del ángulo agudo de mayor amplitud de la Figura 2.44.

Figura 2.44

Comunicación

3. Halla las razones trigonométricas de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, si se sabe que la hipotenusa y uno de sus catetos miden 13 cm y 5 cm, respectivamente.

4. Describe tres formas distintas de hallar la hipotenusa en un triángulo rectángulo cuando se conocen un cateto y un ángulo.

5. La hipotenusa y los catetos de un triángulo rectángulo miden 20 dm, 16 dm y 12 dm, respectivamente. ¿Cuáles son las razones trigonométricas del ángulo agudo de menor amplitud del triángulo?

Evaluación del aprendizaje

Escribe, en función de m, n y p, el seno, el coseno y la tangente de cada ángulo α.

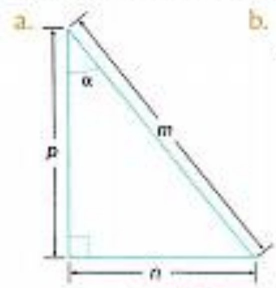


Figura 2.45

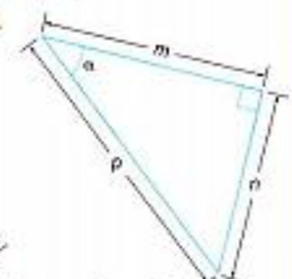


Figura 2.46