	INSTITUCIÓN EDUCATIVA "EL RECUERDO" Resolución de Aprobación de Carácter Oficial No. 0143 de 2017 en los niveles de Preescolar, Básica y Media Académica DANE. 123001800064 NIT. 901048820-9	Fecha

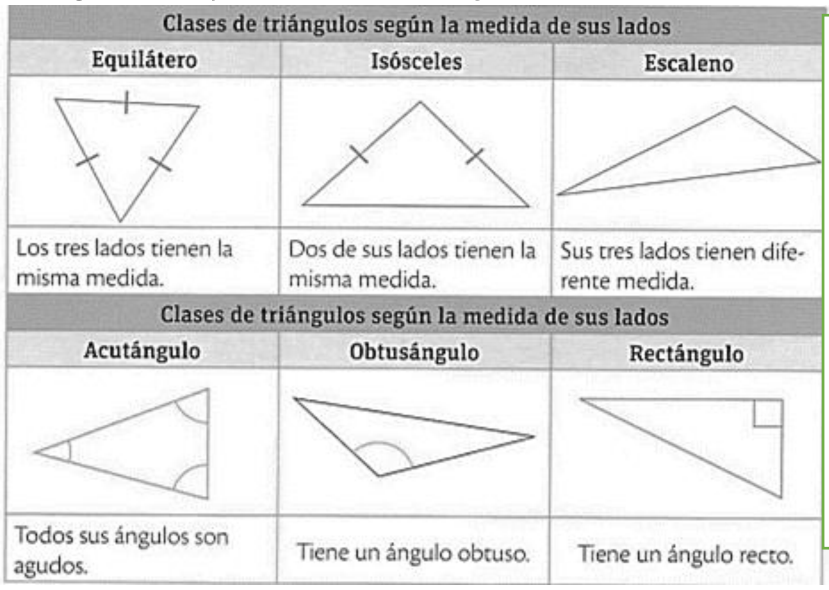
Guía de trabajo del área: Matemáticas – Guía 7	**Grado:** 11
Nombre del docente: Rosa Cano **email:** rcanoieelrecuerdo@gmail.com **Celular:** 3105679770	

TEMAS Y/O SABER	DBA (APRENDIZAJES)
✓ Triángulos, Teorema de pitágoras ✓ Teorema de Tales ✓ Teorema del seno y del coseno	DBA 6: Modela objetos geométricos en diversos sistemas de coordenadas (cartesiano, polar, esférico) y realiza comparaciones y toma decisiones con respecto a los modelos.

Importante: En esta guía recordaremos varios temas que has visto en grados anteriores relacionados con la geometría, que deben ser recordarlos ya que en las pruebas del icfes, encontrarás preguntas relacionadas con los mismos. Así que estúdialos cuidadosamente y memoriza los teoremas.

RECORDEMOS TEMA 1

Triángulos: Se pueden clasificar según la medida de sus lados y según la medida de sus ángulos.



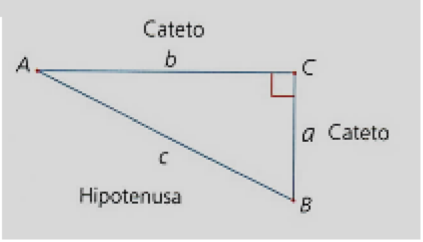
Clases de triángulos según la medida de sus lados		
Equilátero	**Isósceles**	**Escaleno**
Los tres lados tienen la misma medida.	Dos de sus lados tienen la misma medida.	Sus tres lados tienen diferente medida.
Clases de triángulos según la medida de sus lados		
Acutángulo	**Obtusángulo**	**Rectángulo**
Todos sus ángulos son agudos.	Tiene un ángulo obtuso.	Tiene un ángulo recto.

Propiedades de los triángulos: A continuación, se enuncian algunas propiedades de los triángulos.

- La suma de la medida de los ángulos internos de un triángulo es 180°.
- La medida de cada uno de los ángulos internos de un triángulo equilátero es 60°.
- Si un triángulo tiene dos ángulos de igual medida, entonces los lados opuestos a esos ángulos son congruentes.

TEMÁTICA 1: RELACIONES DE UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO. TEOREMA DE PITÁGORAS

La Figura 3.12 muestra un triángulo rectángulo ACB. El lado opuesto al ángulo recto se denomina **hipotenusa** (c) y los otros dos lados reciben el nombre de **catetos** (a y b).



El **teorema de Pitágoras** establece que en todo triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Ejemplo 1

Una escalera de 6 m se apoya sobre una pared alcanzando una altura de 3 m y formando un ángulo de 56°. Para determinar la distancia que separa la pared de la base de la escalera y el ángulo que forma el suelo con la escalera, se puede representar la situación mediante un triángulo rectángulo, como muestra la Figura 3.13. En este caso, se conoce el valor de la hipotenusa, el valor de un cateto y el valor de un ángulo. Al utilizar el teorema de Pitágoras y la relación entre los ángulos internos de un triángulo, se tiene que:

$$6^2 = 3^2 + b^2 \qquad m\measuredangle A + m\measuredangle B + m < C = 180°$$

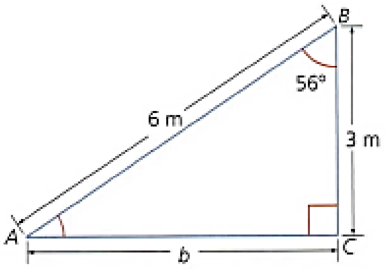
$$b^2 = 6^2 - 3^2 \qquad m\measuredangle A + 56° = 180° - 90°$$

$$b^2 = 36 - 9 \qquad m\measuredangle A = 90° - 56°$$

$$b^2 = 27 \qquad m\measuredangle A = 34°$$

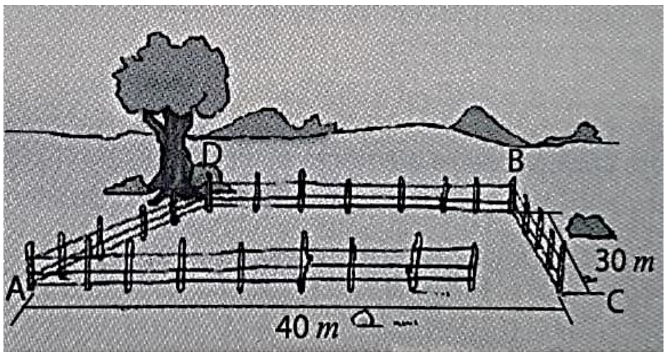
$$b = \sqrt{27} \approx 5{,}19 \text{ m}$$

<u>*Respuesta:*</u> La distancia de la pared a la base de la escalera es de aproximadamente 5,19 m. el ángulo que forma el suelo con la escalera es de 34°.



<u>*Observa detenidamente y analiza el siguiente ejercicio resuelto:*</u> Andrés quiere dividir el terreno rectangular en dos fracciones iguales, trazando una cerca desde el punto A hasta el B como se muestra en la imagen.

A. ¿Cuántos maderos debe colocar Andrés desde el tramo A hasta B por cada dos metros se coloca un pilote?



Solución: Paso 1: Para saber ¿cuántos maderos hay que colocar desde el punto A hasta el B? Es necesario que conozcas la distancia de dicho tramo. Para esto, vemos que al unir los puntos A, B y C se obtiene un triángulo rectángulo como se muestra en la siguiente imagen.

Paso 2: Al ver la imagen 18, observamos que la distancia de interés corresponde a la longitud de la hipotenusa. Por ende, aplicamos teorema de Pitágoras como se muestra a continuación:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 40^2 + 30^2 = 1600 + 900 = 2500$$

$$c^2 = 2500 \leftrightarrow c = \sqrt{2500}$$

$$c = 50\ m$$

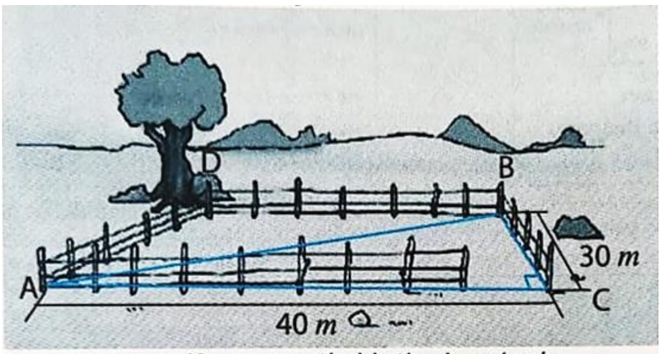


Imagen 18: representación del triángulo rectángulo

Paso 3: La longitud de interés correpsonde a 50m. es por esto que Andrés necesitará 26 maderos, pero como en A y en B ya hay maderos, solo necesita 24 de estos.

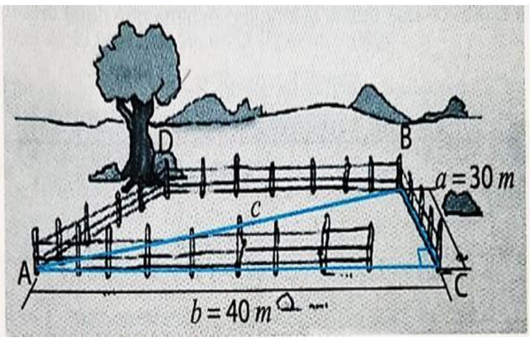
B. Andrés quiere cercar nuevamente el terreno colocando cuatro alambres por cada lado. ¿Cuántos metros de alambre debe comprar para cercar la propiedad? (Nota: tenga en cuenta la diagonal AB).

Solución: Paso 1: Sumamos todas las longitudes (perímetro) 140m. a este valor, le anexamos la distancia de la diagonal AB.

$$d = 2(40\ m) + 2(30\ m) + 50\ m = 190\ m$$

Paso 2: Como Andrés quiere colocar cuatro alambres es necesario multiplicar (190m) x (4), dando un valor de 760 m a manera de conclusión, Andrés debe comprar 760 m de alambre.

C. ¿Qué razón trigonométrica relaciona la distancia BC y AC respecto al Ángulo ABC?



Solución: Paso 1: Para solucionar este interrogante es necesario que sepas definir, cada uno de los catetos.

- ✓ La longitud *"a"* (30m) corresponde al cateto adyacente al Ángulo ABC
- ✓ La longitud "*b"* (40m) representa al cateto opuesto respecto al ängulo ABC.

Paso 2: A continuación, las razones trigonométricas que relacionan al cateto adyacente con el cateto opuesto a la tangente y cotangente.

$$\tan B = \frac{Co}{Ca} = \frac{b}{a} = \frac{40\ m}{30\ m} = \frac{4}{3} \quad \text{Ó} \quad \cot B = \frac{Ca}{Co} = \frac{a}{b} = \frac{30\ m}{40\ m} = \frac{3}{4}$$

ACTIVIDAD PRACTIQUEMOS No. 1

1 Calcula la medida de los ángulos desconocidos en cada triángulo.

a.

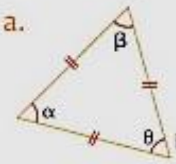


Figura 3.14

b.

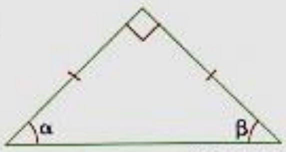


Figura 3.15

c.

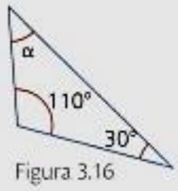


Figura 3.16

d.

Figura 3.17

2 Encuentra la medida de *x* en cada triángulo.

a.

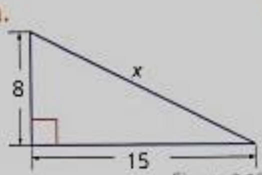


Figura 3.18

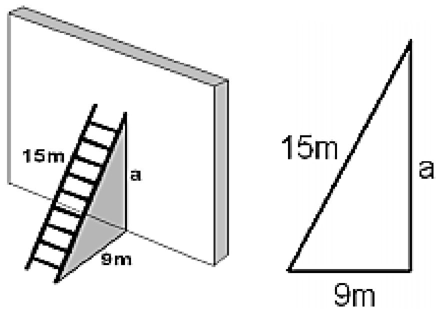
b.

Figura 3.19

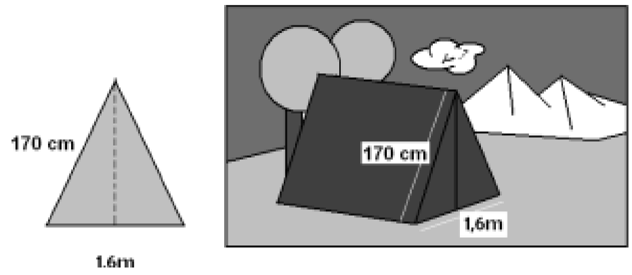
Resolución de problemas

3 Felipe debe decorar la diagonal de una bandera rectangular blanca de 4 m por 8 m con una cinta roja. ¿Qué medida debe tener la cinta?

Ejercicio 10. Una escalera de 15 metros se apoya en una pared vertical, de modo que el pie de la escalera se encuentra a 9 metros de esa pared. Calcula la altura, en metros, que alcanza la escalera sobre la pared.



Ejercicio 19. La cara frontal de una tienda de campaña es un triángulo isósceles cuya base mide 1,6 metros y cada uno de los lados iguales mide 170 centímetros. Calcula la altura en centímetros de esa tienda de campaña.



RECORDEMOS TEMA 2:

Jorge ahorra $5.00 en 1 día y Juan ahorra $20.00 en 4 días

La razón de lo que **ahorran** Jorge y Juan es:

La razón es $\frac{5}{20}$ **o sea** $\frac{1}{4}$

La razón del **tiempo** en que ahorran es

La razón es $\frac{1}{4}$

Como hay igualdad de razones podemos escribir:

$$\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

Esta igualdad es una proporción y se lee:

5 es a 20 como 1 es 4

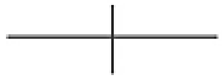
La proporción también puede escribirse así:

5 : 20 = 1 : 4

La **razón** de la **proporción** es $\frac{1}{4}$

- Las rectas **secantes** se cortan en un punto.

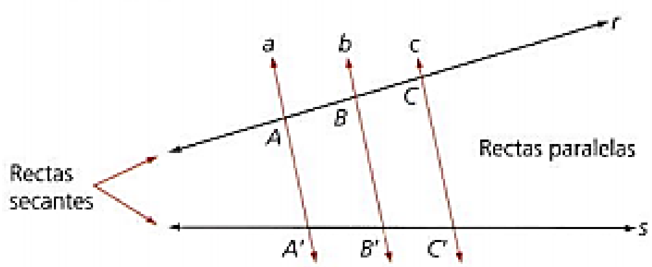
- Las rectas **perpendiculares** se cortan en un punto formando cuatro ángulos iguales.



- Las rectas **paralelas** no se cortan.

TEMÁTICA 2: TEOREMA DE TALES

Si en un triángulo se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados, se obtienen dos triángulos semejantes. Dicho de otra manera, si dos rectas secantes son cortadas por tres o más rectas paralelas, entonces los segmentos determinados sobre las rectas secantes son proporcionales. en la figura se observan dos rectas secantes (*r* y *s*) cortadas por varias rectas paralelas (*a, b y c).*



Según el teorema de Tales, los segmentos determinados sobre la recta *r* son proporcionales a los segmentos determinados sobre la recta *s.* es decir:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

Ejemplo 1

Observa cómo se halla la longitud del segmento $A'B'$ de la Figura 4.105, sabiendo que $\overleftrightarrow{AA'} \parallel \overleftrightarrow{BB'} \parallel \overleftrightarrow{CC'}$.

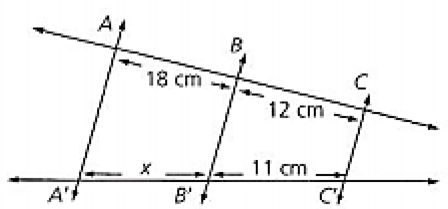


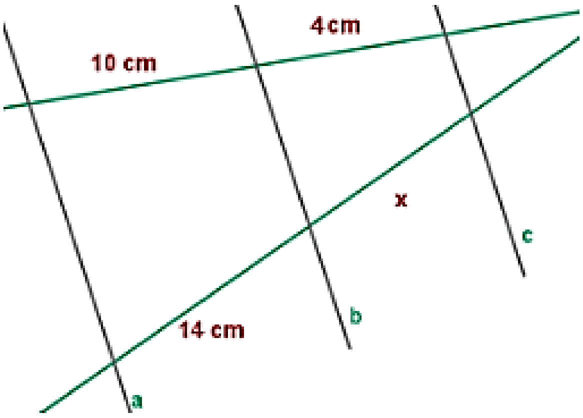
Figura 4.105

Según el teorema de Tales:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} \Rightarrow \frac{18}{x} = \frac{12}{11} \Rightarrow 12 \cdot x = 18 \cdot 11 \Rightarrow x = \frac{18 \cdot 11}{12} = 16{,}5.$$

Es importante que aprendas a identificar los momentos en los que es necesario aplicar cada uno de los teoremas dependiendo de las preguntas y problemas que se presenten. El teorema de Pitágoras lo aplica cuando en el ejercicio se presente un triángulo rectángulo y el teorema de tales cuando intervengan rectas secantes que son cortadas por otras rectas paralelas y se desconozca la medida de uno de los segmentos de recta involucrados.

Ejemplo 2: Las rectas *a*, *b*, y *c* son paralelas. Halla la longitud de x.



Solución:

Aplicando el teorema de Tales, tenemos:

$$\frac{14}{10} = \frac{x}{4}$$

Despejamos *x,* pasando el 4 que lo está dividiendo a multiplicar por 14, así:

$$X = \frac{14}{10} . 4$$

$$x = \frac{14 \cdot 4}{10} = 5.6cm$$

Recordemos el concepto de recta paralela y recta secante y recta perpendicular:

"ASESORIA: si tiene alguna duda o no entiende algo sobre esta guía, comuníquese con el número que aparece en la parte de arriba"

ACTIVIDAD PRACTIQUEMOS No. 2

¡ATENCIÓN!: Entrega las 3 actividades PRACTIQUEMOS en un solo trabajo.

4 Aplica el teorema de Tales para hallar la longitud de los segmentos que faltan en cada caso.

a. $\vec{a} \parallel \vec{b} \parallel \vec{c} \parallel \vec{d}$

b. $\vec{r} \parallel \vec{s} \parallel \vec{t} \parallel \vec{u} \parallel \vec{v}$

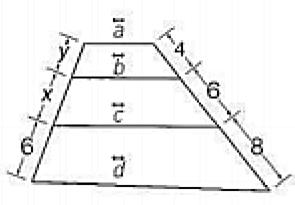


Figura 4.108

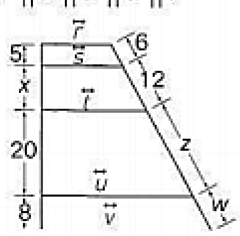


Figura 4.109

10 Las dimensiones de una fotografía son 6,5 cm por 2,5 cm. Si se quiere ampliar de manera que el lado mayor mida 26 cm, ¿cuánto medirá el lado menor?

Nota: Realiza los dibujos necesarios para tratar de recrear la situación planteada.

11 Traza en un triángulo *ABC* una recta paralela al lado $\overline{BC}$ desde un punto B', de manera que $AB' = 0{,}25AB$. ¿Cuál es la razón de semejanza?

Debes tener en cuenta el concepto de razón, recuerda que la razón se refiere al cociente o división de dos factores, por ejemplo, la razón entre a y b se expresa: $\frac{a}{b}$

i En un triángulo *ABC*, las medidas de los lados son $a = 6$ cm, $b = 8$ cm y $c = 10$ cm. Calcula los lados de un triángulo $A'B'C'$, semejante al triángulo *ABC*, de perímetro igual a 36 cm.

ii Una fotografía rectangular de 10 cm de base por 15 cm de altura se enmarca dejando una franja de 1 cm de ancho por todo el borde, como muestra la Figura 4.113. ¿Son semejantes los rectángulos que se forman al interior y al exterior?

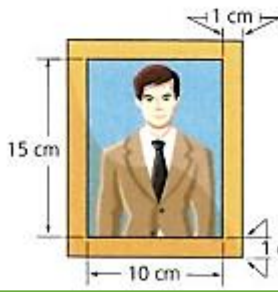


Figura 4.113

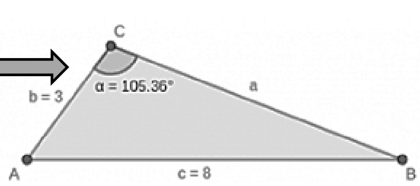
TEMÁTICA 3: TEOREMA DEL SENO Y DEL COSENO

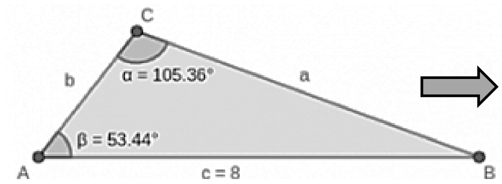
EL TEOREMA DEL SENO permite resolver un triángulo cualquiera, si se conoce un lado y otros dos elementos del triángulo (al menos un ángulo). Este teorema indica que dado un triángulo ABC cualquiera se verifica que **cada lado de un triángulo es directamente proporcional al seno del ángulo opuesto.**

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

Este teorema es útil para resolver problemas si los datos dados entran en alguno de los siguientes casos:

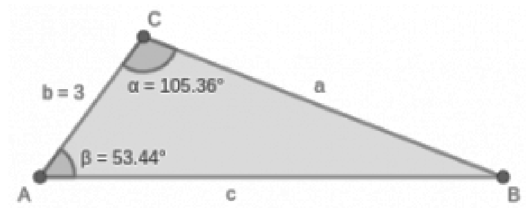
Caso 1: Si tenemos las medidas de 2 lados de un triángulo, y el ángulo opuesto a uno de ellos. Aplicando el teorema inmediatamente puedo obtener el ángulo opuesto al otro lado que conocemos





Caso 2: Si tenemos las medidas de 2 ángulos de un triángulo, y el lado opuesto a uno de ellos. Aplicando el teorema inmediatamente puedo obtener el lado opuesto al otro ángulo que conocemos.

Caso 3: Cuando se conocen 2 ángulos del triángulo y un lado que no es opuesto a ninguno de ellos, sólo que requiere un paso extra, que es obtener el otro ángulo del triángulo. Esto es posible porque sabemos que la suma de los ángulos de un triángulo es 180°.
Por ejemplo, en la imagen de arriba, el ángulo B se obtiene de restar los otros 2 ángulos a 180:



$$\measuredangle B = 180 - \alpha - \beta$$

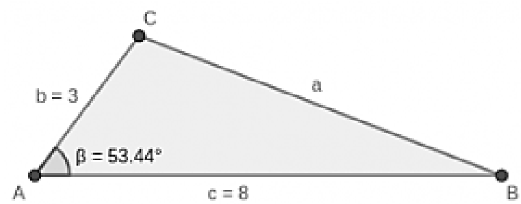
Ignorando uno de los ángulos dados originalmente, ya tenemos los datos de 2 ángulos y el lado opuesto de uno de ellos, como el segundo caso mencionado en las aplicaciones. El ángulo B=21,2.

<u>EL TEOREMA DEL COSENO</u> permite resolver triángulos de los cuales se conocen tres lados o dos lados y el ángulo comprendido entre ellos. Este teorema indica que, dado cualquier triángulo ABC se cumple qué:

$a^2 = b^2 + c^2 – 2bc \cos A$
$b^2 = a^2 + c^2 – 2ac \cos B$
$c^2 = a^2 + b^2 – 2ab \cos C$

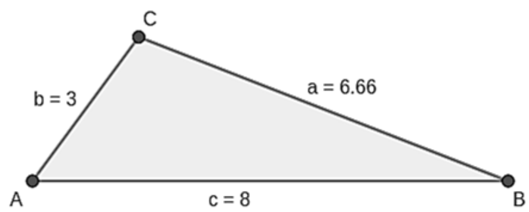
Este teorema es útil para resolver problemas:

Caso 1: Si tenemos la medida de un ángulo y de los lados adyacentes a este. Aplicando el teorema podemos obtener el tercer lado, es decir el lado opuesto al ángulo que tenemos, pues



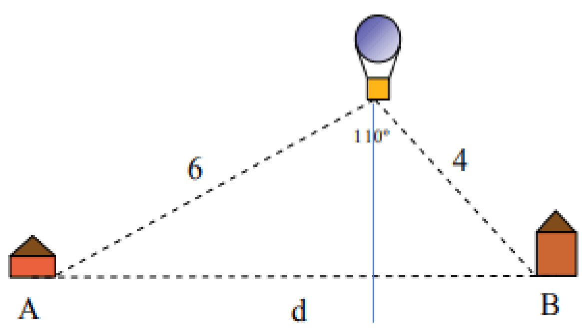
$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos A}$$

Caso 2: Si tenemos la medida de los 3 lados de un triángulo.
Aplicando el teorema podemos obtener cualquier ángulo, pues



$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \qquad \Rightarrow \qquad A = \cos^{-1}\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)$$

<u>Analiza y comprende el siguiente ejercicio resuelto:</u> Desde lo alto de un globo se observa un pueblo A con un ángulo de 50º, y otro B, situado al otro lado y en línea recta, con un ángulo de 60º. Sabiendo que el globo se encuentra a una distancia de 6 km del pueblo A y a 4km del pueblo B, calcula la distancia entre los pueblos A y B.

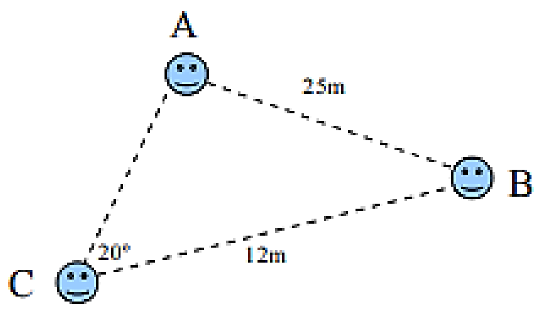


Hagamos primero un esquema de la situación. Sería así: El ángulo debajo del globo es de 110º porque si trazáramos una perpendicular desde el globo al suelo, a la izquierda tendríamos 50º y a la derecha 60º (por cierto, también nos podrían preguntar la altura a la que está el globo). Aquí tendremos que usar el **<u>teorema del coseno</u>**, porque el ángulo que conocemos es el que forman los dos lados de los cuales tenemos la longitud de cada uno de ellos.

$d^2 = 6^2 + 4^2 - 2·6·4·\cos 110º$ → *El ángulo D es el que esta comprendido entre los lados conocidos.*
$d^2 = 52 – 48·(\underline{-0,34})$ → *Hallas este valor en tu calculadora científica o en la calculadora de un celular*
$d^2 = 52 + 16,32$ → *Recuerda siempre resolver primero multiplicaciones y divisiones y por último sumas y restas.*
d = 8,27Km

<u>Analiza y comprende el siguiente ejercicio resuelto</u>: Tres amigos se sitúan en un campo de fútbol. Entre Alberto y Berto hay 25 metros, y entre Berto y Camilo, 12 metros. El ángulo formado en la esquina de Camilo es de 20º. Calcula la distancia entre Alberto y Camilo.

El esquema de la situación sería algo así:



Primero identificamos qué teorema nos sirve para solucionar este ejercicio, en este caso vemos que contamos con un lado y el ángulo opuesto a este. Para hallar la medida del lado que nos falta, nos basta recurrir al **teorema del seno**. El problema es que el ángulo opuesto al lado AC tampoco lo sabemos, algo que tiene fácil solución si primero aplicamos el teorema del seno para hallar el ángulo A y después deducir la medida de B.

$$\frac{25}{\text{sen } 20°} = \frac{12}{\text{sen A}}$$

$$73{,}10 = \frac{12}{\text{sen A}}$$

$$\text{Sen A} = \frac{12}{73{,}10}$$

$$\text{Sen A} = 0{,}16$$

$$A = 9{,}45°$$

Como los tres ángulos deben sumar 180º, B debe valer 150,55º (180°- 20° -9,45° = 150,55°). Ahora ya tenemos todo lo necesario para volver a usar el teorema del seno y hallar la distancia AC:

$$\frac{25}{\text{sen } 20°} = \frac{AC}{\text{sen } 150{,}55°}$$

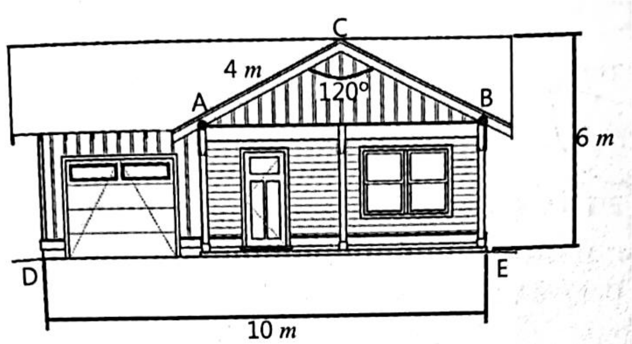
$$73{,}10 = \frac{AC}{0{,}49}$$

$$AC = 73{,}10 \cdot 0{,}49 = 35{,}94\text{m}$$

ACTIVIDAD PRACTIQUEMOS No. 2

1. Una valla cuyo perímetro tiene forma triangular mide 20 metros en su lado mayor, 6 metros en otro y 60º en el ángulo que forman entre ambos. Calcula cuánto mide el perímetro de la valla.

2. Responde A, B, C o D a la siguiente situación.



El triángulo ΔACB, formado por el frente de la casa corresponde a un triángulo isósceles.

9. Un arquitecto observa que el techo de la casa es inestable. Para esto, propone colocar una viga desde el punto A hasta B. ¿Qué expresión permite determinar la longitud de la viga en metros?

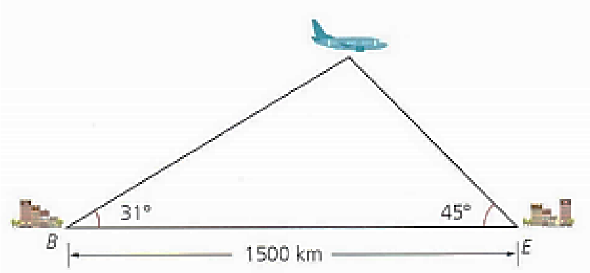
I. $AB = \sqrt{4^2 + 4^2 - 2(4)(4)\cos(120°)}$

II. $\dfrac{AB}{\text{sen }(120°)} = \dfrac{4}{\text{sen }(30°)}$

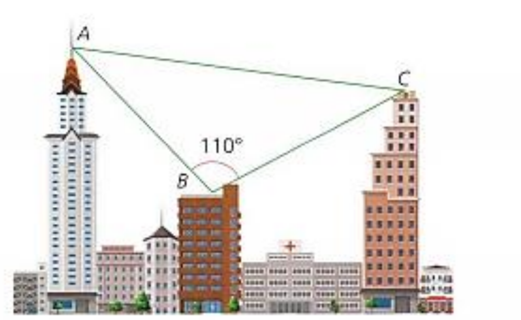
III. $AB = \sqrt{4^2 + 4^2}$

A. II solamente.
B. I y III solamente.
C. I, II y III
D. I y II solamente.

3. Un avión viaja entre dos ciudades *B* y *E* con ángulos de elevación de 31° y 45°, respectivamente. La distancia entre las ciudades es de 1 500 km. Halla la distancia del avión a cada ciudad.



4. Felipe está en la azotea *B* de su edificio observando los dos edificios más altos *A* y *C* de la Figura 3.165. Si la distancia desde la azotea de su edificio a los otros dos es 80 m y 110 m, ¿cuál es la distancia entre las azoteas *A* y *C*?



Recuerda Entregar las 3 actividades Aprendamos en un solo trabajo. La idea es que te concentres en trabajar los ejercicios en tu cuaderno comprendiendo su aplicación. Al final el tiempo establecido para el estudio de la guía ya tendrás todos tus talleres terminados y puedes proceder a enviarlos.
Muchos éxitos en tu aprendizaje y en el desarrollo de las pruebas.
Esfuérzate y sé valiente
No olvides consultarme cualquier duda vía WhatsApp.

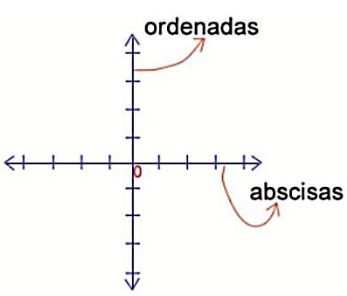
	INSTITUCIÓN EDUCATIVA “EL RECUERDO” Resolución de Aprobación de Carácter Oficial No. 0143 de 2017 en los niveles de Preescolar, Básica y Media Académica DANE. 123001800064 NIT. 901048820-9	Fecha

Guía de trabajo del área: Matemáticas – Guía 8	**Grado:** 11
Nombre del docente: Rosa Cano **email:** rcanoieelrecuerdo@gmail.com **Celular:** 3105679770	

TEMAS Y/O SABER	DBA (APRENDIZAJES)
✓ Puntos de corte, simetría y asíntotas ✓ Transformaciones de funciones	**DBA 8:** Encuentra derivadas de funciones, reconoce sus propiedades y las utiliza para resolver problemas.

*******Nota: La mejor manera de trabajar tu guía es la siguiente:*** *Inicia por la sección RECORDEMOS O SABERES PREVIOS y realiza las actividades allí propuestas. Luego continúa con la sección APRENDAMOS, transcribe todo el contenido de esta sección en tu cuaderno, leyendo los ejemplos, comprendiéndolos y resolviéndolos en tu cuaderno. En caso que no comprendas un concepto o ejemplo escribe a tu docente a los números que están en el encabezado de esta guía según el horario de clases establecido. Luego de comprender los temas, ya puedes proceder a resolver los talleres. Envía al correo electrónico los talleres resueltos de la sección PRACTIQUEMOS, preferiblemente en formato PDF indicando Asignatura, número de guía y nombre del estudiante. Solo envía el taller* *******

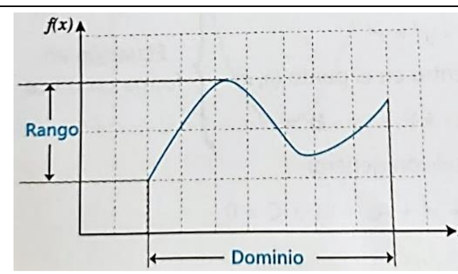
SABERES PREVIOS



Recuerda:

✓ El dominio son todos los valores que puede tomar la variable independiente *x*.

✓ El rango son todos los valores que puede tomar la variable dependiente *y*.



APRENDAMOS PARTE 1

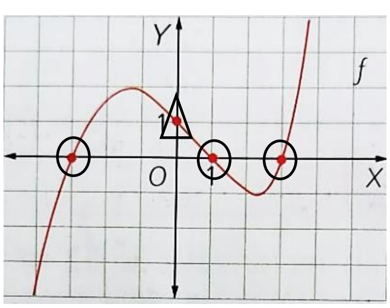
Puntos de corte de una función con los ejes

Los puntos de corte con los ejes de una función f(x) son los puntos de intersección de la gráfica de la función con cada uno de los ejes de coordenadas (X, Y).

Los **puntos de corte** de la función f con el **eje X** se calculan resolviendo la ecuación $f(x) = 0$. Puede haber más de un punto de corte de una función con el eje X.

El **punto de corte** de la función f con el **eje Y** es el punto $(0, f(0))$. Hay máximo un punto de corte con el eje Y, ya que si no, f no sería función.

Revisemos el ejercicio de la sección Analiza y Conoce de la página 34 del texto guía:



Analiza: Determina las coordenadas de los puntos de corte de la función *f* de la figura, con los ejes de las abscisas y las ordenadas.

Los puntos de la gráfica de una función *y = f(x)* son de la forma *(a, f(a))* con *a € D(f).* En la figura se observa que la gráfica de *f* corta el eje de las abscisas en los puntos (-3,0), (1,0) y (3,0) (círculos en la figura) y el eje de las ordenadas en el punto (0,1) (triángulo en la figura).

Las coordenadas de los puntos que pertenecen al eje *X* las abscisas son de la forma *(a, 0)* y las de los puntos que pertenecen al eje *Y*, las ordenadas, son de la forma *(0,a).*

Ejemplo 1: Halla los puntos de corte con los ejes de la función $f(x) = \frac{x-6}{x-2}$.

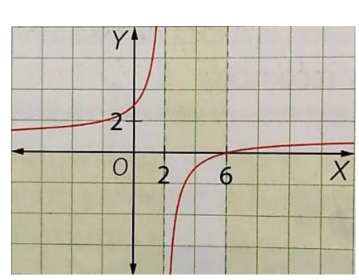
- **Puntos de corte con el eje X:** estos se encuentran resolviendo la ecuación $f(x) = 0$, es decir, $\frac{x-6}{x-2} = 0$. La única solución es $x = 6$; luego, el punto de corte de la función con el eje X es $(6, 0)$.

Esto debido a que quedaría: $\frac{6-6}{6-2} = \frac{0}{4} = 0$

- **Punto de corte con el eje Y:** se calcula el valor de la función para $x = 0$. Es decir, $f(0) = \frac{0-6}{0-2} = 3$. Entonces, el punto de corte de la función con el eje Y es $(0, 3)$.

f(0) implica que donde esté *“x”* se reemplaza con 0

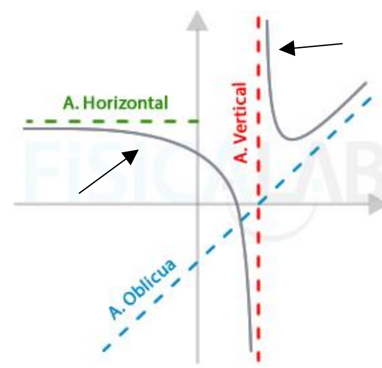
En la figura ubicada a la derecha se muestra la representación gráfica de *f(x)* para este ejemplo.



“ASESORIA: si tiene alguna duda o no entiende algo sobre esta guía, comuníquese con el número que aparece en la parte de arriba”

Ramas infinitas. Asíntotas

La palabra asíntota proviene del griego *asumptotos* que significa *sin encontrarse*. En la figura tenemos los 3 tipos de asíntotas que puede presentar una función: una asíntota horizontal; una asíntota vertical; y una asíntota oblicua. Como puedes ver, las ramas de la función señaladas con la flecha, nunca tocan a las asíntotas, pero *se aproximan* de manera constante a ellas.



Por ejemplo:

En la función $f(x)$ de la Figura 5.19 se observa que cuando x se acerca a 4, tanto por la derecha como por la izquierda, los valores de $f(x)$ se hacen cada vez más grandes o más pequeños, respectivamente. Es decir:

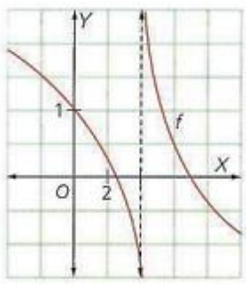


Figura 5.19

Las dos ramas de la función que se acercan a la recta $x = 4$ se conocen como **ramas infinitas** (aparecen cuando alguna de las variables o ambas tienden a $+\infty$ o a $-\infty$). Si una rama infinita de una función se aproxima a una recta, como en este caso, dicha recta será una **asíntota** de la función. Por tanto, la recta $x = 4$ es una asíntota vertical de $f(x)$.

APRENDAMOS PARTE 2

Simetría con respecto al eje de ordenadas

Una función **es simétrica respecto al eje Y** si se cumple que $f(-x) = f(x)$.

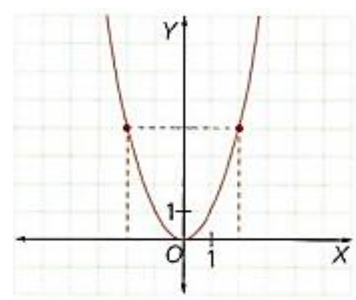
Una función que presenta este tipo de simetría se denomina **función par**.

- **Ejemplo 1**

La función $f(x) = x^2$ es par, pues $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.

En la Figura 2.12 se aprecia la simetría respecto del eje de ordenadas.

Simetría par



Simetría con respecto al origen de coordenadas

Una función es **simétrica respecto al origen de coordenadas** si se cumple que $f(-x) = -f(x)$.

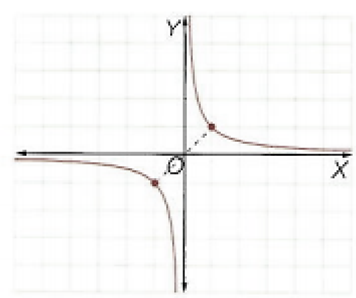
Una función que presenta este tipo de simetría se denomina **función impar**.

- **Ejemplo 2**

La función $f(x) = \frac{1}{x}$ es impar, pues $f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$.

En la Figura 2.13 se visualiza la simetría respecto al origen de coordenadas.

Simetría impar



Observa este ejemplo donde se completa la gráfica de cada función impar:

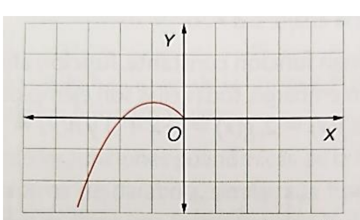
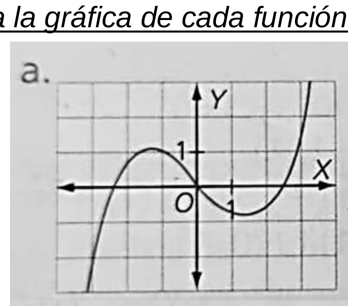


Figura 2.14



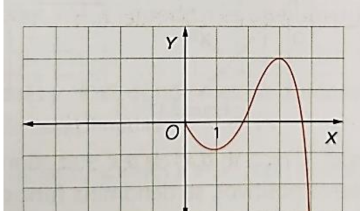
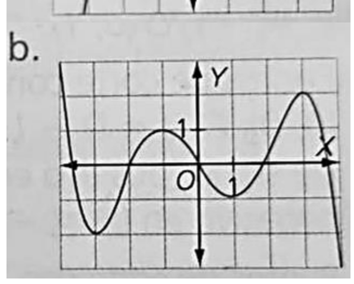


Figura 2.15



Transformación de funciones

Traslación: una función se puede trasladar en el plano vertical u horizontalmente.

Tralasción vertical:

Dada una función $f(x)$ y un número real p, se dice que $y = f(x) + p$ es una **traslación vertical** de $f(x)$.

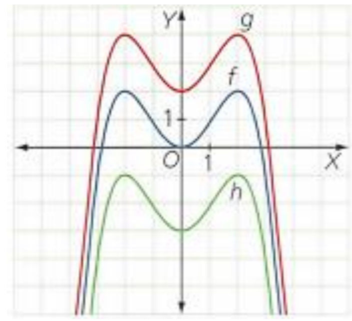
- Si $p > 0$, la gráfica de $f(x)$ se traslada en el plano p unidades hacia arriba.
- Si $p < 0$, la gráfica de $f(x)$ se traslada en el plano p unidades hacia abajo.

Ejemplo 1

En la Figura 2.74, g y h se obtienen a partir de f por una traslación vertical.

Para obtener la gráfica de g, la gráfica de f se traslada verticalmente hacia arriba (dos unidades); para obtener la gráfica de h, la gráfica de f se traslada verticalmente hacia abajo (tres unidades).

$$g(x) = f(x) + 2 \qquad h(x) = f(x) - 3$$



Traslación horizontal:

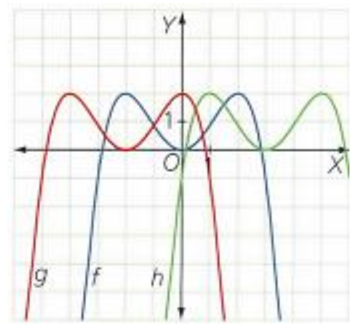
Dada una función $f(x)$ y un número real p, se dice que $y = f(x + p)$ es una **traslación horizontal** de $f(x)$.

- Si $p > 0$, la gráfica de $f(x)$ se traslada en el plano p unidades hacia la izquierda.
- Si $p < 0$, la gráfica de $f(x)$ se traslada en el plano p unidades hacia la derecha.

Ejemplo 2

En la gráfica de la Figura 2.75, g y h se obtienen a partir de f por una traslación horizontal. Para obtener la gráfica de g se desplaza la de f dos unidades hacia la izquierda, y la de h se obtiene desplazando la de f tres unidades hacia la derecha.

$$g(x) = f(x + 2) \qquad h(x) = f(x - 3)$$



Dilatación y contracción vertical

Dada una función $f(x)$ y un número real positivo k, se dice que $k\,f(x)$ es una **dilatación o una contracción vertical** de $f(x)$. Si $k > 1$, la gráfica de $f(x)$ se contrae verticalmente; si $0 < k < 1$, la gráfica de $f(x)$ se dilata verticalmente.

Ejemplo 3

En la Figura 2.76, g y h se obtienen a partir de la función f contrayendo o dilatando su gráfica en sentido vertical.

$$g(x) = 2f(x) \qquad h(x) = \frac{1}{2}\,f(x)$$

Si $a(x) = 2x$, g se escribe como la composición de las funciones

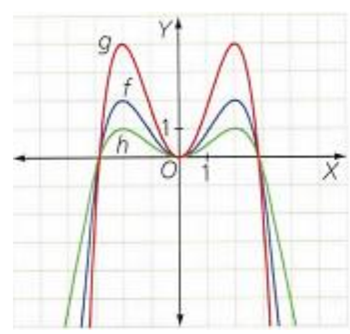
$$g(x) = (a \circ f)(x) = a[f(x)] = 2f(x).$$

Como el factor que aparece en a es mayor que 1, la gráfica se contrae.

Si $b\,(x) = \frac{1}{2}x$ la función h es la composición de las funciones

$$h(x) = (b \circ f)(x) = b[f(x)] = \frac{1}{2}\,f(x).$$

El factor que aparece en b es positivo y menor que 1, así que la gráfica se dilata.



Dilatación o contracción horizontal

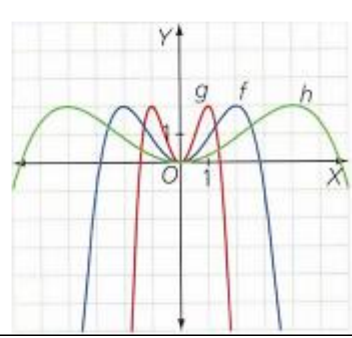
Dada una función $f(x)$ y un número real positivo k, se dice que $f\,(kx)$ es una **dilatación o una contracción horizontal** de $f(x)$. Si $k > 1$, la gráfica de $f(x)$ se contrae horizontalmente, pero si $0 < k < 1$, la gráfica de $f(x)$ se dilata horizontalmente.

Ejemplo 4

En la Figura 2.77, g y h se obtienen a partir de f contrayendo o dilatando su gráfica en dirección horizontal.

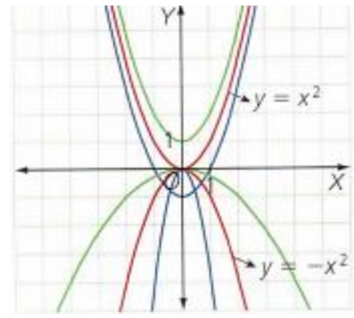
$$g(x) = f\,(2x) \qquad h\,(x) = f\left(\frac{1}{2}x\right)$$

Como el factor que determina el valor de a es mayor que 1, la gráfica se contrae. Como el factor de b es positivo y menor que 1, la gráfica se dilata.



Ejemplo 5

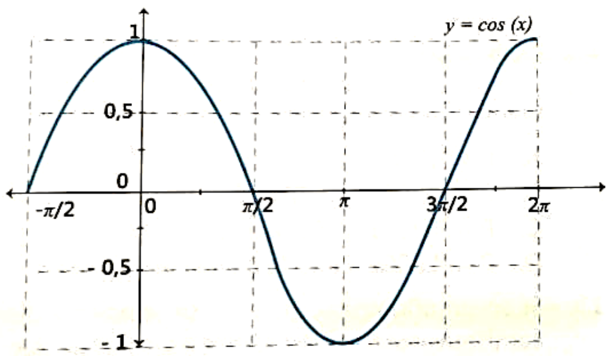
Las parábolas de la Figura 2.78 no se han trasladado ni horizontal ni verticalmente; así que sus gráficas son el resultado de dilataciones o contracciones de $y = x^2$ y $y = -x^2$, respectivamente. Los factores de dilatación o contracción no pueden determinarse a simple vista, pero es claro que hay valores positivos menores que 1 y positivos mayores que 1.



PRACTIQUEMOS- ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE 2

RESPONDA LAS PREGUNTAS 1 A LA 3 DE ACUERDO AL SIGUIENTE ENUNCIADO

Sea la función $y = \cos x$, con punto de corte en el eje de las "Y" (0, 1). Si se desplaza a, unidades hacia arriba($a > 0$).



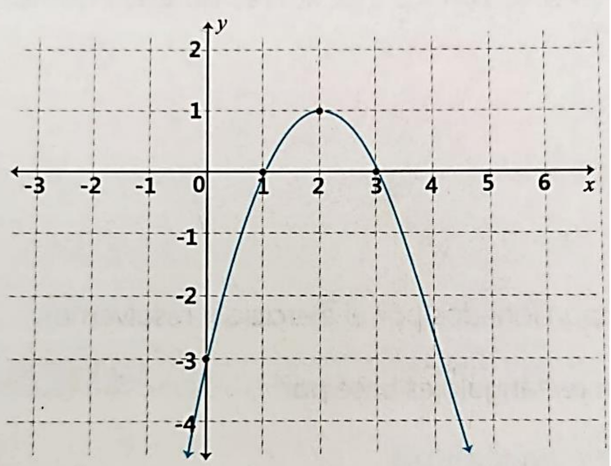
1. ¿Cuál es la expresión que define esta nueva función?
   - **A.** $y = \cos(x + a)$
   - **B.** $y = \cos(x) + a$
   - **C.** $y = a \cdot \cos x$
   - **D.** $y = a$

2. ¿Cuál es el nuevo punto de corte con el eje de las "Y"?
   - **A.** (0, 1)
   - **B.** (0, a)
   - **C.** (0, a + 1)
   - **D.** (a, 0)

3. Qué valor (es) debe tomar la constante a para que la función desplazada no tenga puntos de corte con el eje de las "X"
   - **A.** 2
   - **B.** 1
   - **C.** 0
   - **D.** $a > 2$

4.

¿Cuál de las siguientes ecuaciones define la gráfica ilustrada en la imagen?



A. $y = (x - 2)^2 + 1$
B. $y = -(x + 2)^2 - 1$
C. $y = (x + 2)^2 + 1$
D. $y = -(x - 2)^2 + 1$

5.

Completa cada uno de los siguientes enunciados relacionados con la dilatación y la traslación de funciones. ACTIVIDAD PARA COMPLETAR

a. A partir de la gráfica de una determinada función $y = f(x)$, se puede representar la gráfica de cualquier función de la forma $y = f(x) + b$, siendo b un número real cualquiera. Si $b > 0$, la gráfica se desplaza .... b unidades.

b. A partir de la gráfica de una determinada función $y = f(x)$, se puede representar cualquier función de la forma $y = b(f(x))$ siendo b un número real menor que 1. La gráfica de $f(x)$ se alarga ....

Nota: En este punto y con estas temáticas tratadas en la guía lo más importante es tu comprensión de cada concepto abordado. Por ello en caso de tener dudas respecto a los temas tratados en esta guía no dudes en consultarme vía WhatsApp. Deberás revisar cuidadosamente los ejemplos y aprender las fórmulas, pero es más fácil recordarlas cuando las comprendemos. Quedo a tu entera disposición para ayudarte en ese proceso.

	INSTITUCIÓN EDUCATIVA “EL RECUERDO” Resolución de Aprobación de Carácter Oficial No. 0143 de 2017 en los niveles de Preescolar, Básica y Media Académica DANE. 123001800064 NIT. 901048820-9	Fecha

Guía de trabajo del área: Matemáticas – Guía 9	**Grado:** 11
Nombre del docente: Rosa Cano **email:** rcanoieelrecuerdo@gmail.com **Celular:** 3105679770	

TEMAS Y/O SABER	DBA (APRENDIZAJES)
✓ **Tipos de funciones**	**DBA 8: Encuentra derivadas de funciones, reconoce sus propiedades y las utiliza para resolver problemas.**

*******Nota: La mejor manera de trabajar tu guía es la siguiente:*** *Inicia por la sección RECORDEMOS O SABERES PREVIOS y realiza las actividades allí propuestas. Luego continúa con la sección APRENDAMOS, transcribe todo el contenido de esta sección en tu cuaderno, leyendo los ejemplos, comprendiéndolos y resolviéndolos en tu cuaderno. En caso que no comprendas un concepto o ejemplo escribe a tu docente a los números que están en el encabezado de esta guía según el horario de clases establecido. Luego de comprender los temas, ya puedes proceder a resolver los talleres. Envía al correo electrónico los talleres resueltos de la sección PRACTIQUEMOS, preferiblemente en formato PDF indicando Asignatura, número de guía y nombre del estudiante. Solo envía el taller* *******

SABERES PREVIOS

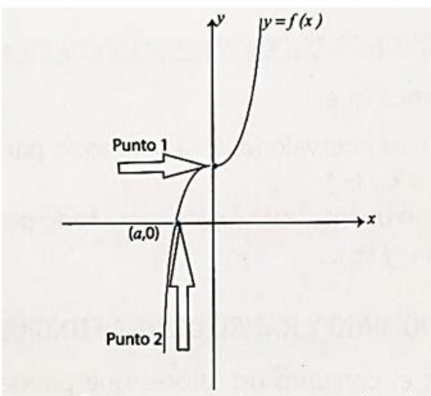


Imagen 5: intercepto con los ejes coordenados

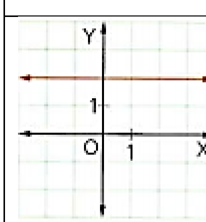
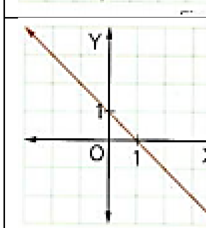
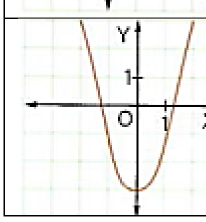
En esta guía revisaremos los tipos de funciones teniendo en cuenta que hay además unas funciones especiales y unas funciones trascendentes. Conoceremos acerca de ellas su definición, su gráfico, caracteristicas mas relevantes.
Lee la guía con detenimiento y comprende los gráficos y ejemplos que se expresan allí. En caso de alguna duda comunicate con tu docente para que sean despejadas.
Al finalizar encontrarás el taller a desarrollar, el cual es bastante corto puesto que es importante que dediques el mayor tiempo posible a la comprensión de la guía. Deberás tener en cuenta todo lo aprendido con anterioridad, en caso que tengas alguna inquietud puedes remitirte a las guias anteriores o a tu cuaderno, e incluso a esta sección de saberes previos.
Te deseo muchos éxitos estudiando este material.

APRENDAMOS PARTE 1

Funciones polinómicas

La función $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$, donde $a_n \neq 0$ y los exponentes de x son enteros positivos, se denomina **función polinómica de grado *n***. Las constantes $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, ..., a_1, a_0$ se denominan **coeficientes** y a_0 se denomina **término independiente**. El dominio de las funciones polinómicas es el conjunto de los números reales.

Las funciones f, g y h se denominan **función constante**, **función afín** y **función cuadrática**, respectivamente; sin embargo, todas ellas son ejemplos de **funciones polinómicas**. Las funciones $f(x) = 2$, $g(x) = -x + 1$ y $h(x) = 2x^2 - 3$ son polinómicas.

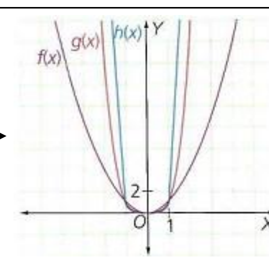
Gráfico	Función polinómica
	Función constante *f(x) = 2*
	Función afín *g(x) = - x + 1*
	Función cuadrática *h(x) = 2x² - 3*

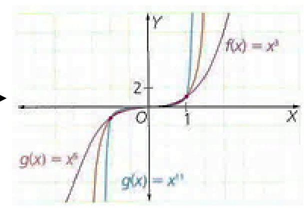
A continuación comprenderemos algunas caracteristicas de las funciones polinómicas:

- Siempre su dominio son todos los reales.

Características de las funciones polinómicas de la forma *f(x) = xⁿ*

- El recorrido de las funciones de la forma $y = x^n$, con n un número par, es $[0, +\infty)$.
- El recorrido de las funciones de la forma $y = x^n$, con n un número impar, es el conjunto de los números reales.
- La gráfica de las funciones polinómicas de la forma $y = x^n$, con n un número par, tiene forma de parábola, similar a la función cuadrática $y = x^2$; si n es impar, la gráfica tiene una forma similar a la de la función cúbica $y = x^3$.
- Las funciones $y = x^n$, donde n es un número par, son simétricas respecto al eje Y.
- Las funciones $y = x^n$, donde n es un número impar, son simétricas respecto al origen de coordenadas.
- La gráfica de las funciones $y = x^n$, con $n \in \mathbb{Z}$, corta los ejes en (0, 0).



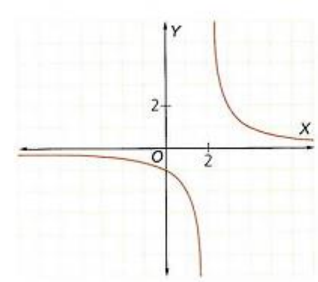


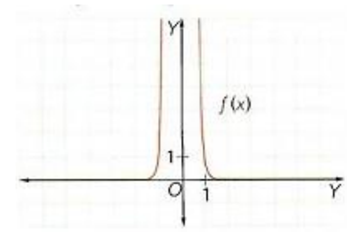
Funciones racionales:

Una función $f(x)$ de la forma $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios y $Q(x) \neq 0$, se llama **función racional**.

El **dominio** de una función racional $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ es el conjunto de los números reales para los cuales $Q(x) \neq 0$.

Ejemplos función racional





Características de las funciones racionales de la forma $f(x) = \frac{1}{x^n}$

- El dominio es $\mathbb{R} - \{0\}$.
- Si n es un número par, el recorrido es $(0, +\infty)$.
- Si n es un número impar, el recorrido es $\mathbb{R} - \{0\}$.
- Las funciones $y = \frac{1}{x^n}$, con n siendo un número par, son simétricas respecto al eje Y.
- Las funciones $y = \frac{1}{x^n}$, con n siendo un número impar, son simétricas respecto al origen de coordenadas.
- Las rectas $x = 0$ y $y = 0$ son asíntotas, vertical y horizontal, respectivamente.

FUNCIONES TRASCENDENTES

Las **funciones trascendentes** tienen la particularidad que la variable independiente toma las veces de exponente, está afectada por un logaritmo o por una función trigonométrica. Así, las siguientes son funciones trascendentes:

- Función exponencial.
- Función logarítmica.
- Funciones trigonométricas.

1. **Función exponencial**

Una función de la forma $f(x) = b^x$ es una **función exponencial**, siempre que b sea un número real positivo distinto de 1.

Características de la función exponencial

- Si $0 < a < 1$, la función es decreciente.
- Si $a > 1$, la función es creciente.

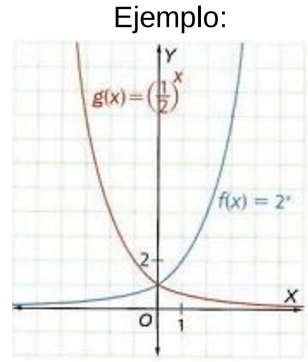
El punto de corte con el eje y es el punto $(0, 1)$, ya que $f(0) = a^0 = 1$.

La función pasa por el punto $(1, a)$, ya que $f(1) = a^1 = a$.

$y = 0$ es una asíntota horizontal.

Un caso especial de la función exponencial se presenta cuando a es el número irracional, $e = 2{,}7182\ldots$

Ejemplo:

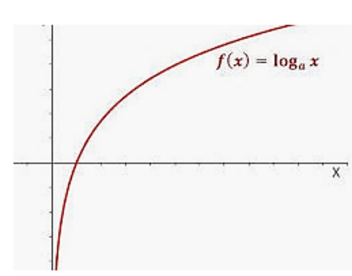


2. **Función logarítmica**

Una función de la forma $f(x) = \log_a x$, donde $a \neq 0$ y $a^{f(x)} = x$, se conoce como **función logarítmica**.

Propiedades de la función logarítmica

- El dominio de la función $f(x) = \log_a x$ es el conjunto de los números reales mayores que 0 y el rango es el conjunto de los números reales.
- Para todo valor $a \neq 0$, $\log_a 1 = 0$; es decir, la intersección con el eje X es el punto $(1, 0)$. La gráfica de la función $f(x) = \log_a x$ no interseca el eje Y.
- El eje Y es una asíntota vertical de la gráfica de $f(x)$.
- La gráfica de $f(x)$ vista de izquierda a derecha asciende si $a > 1$, y desciende si $0 < a < 1$.

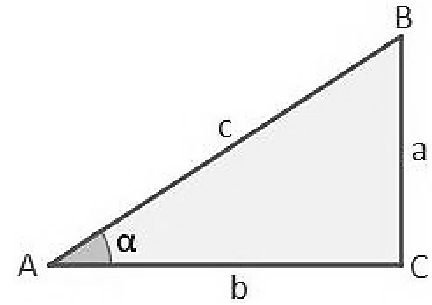


Nota que esta función siempre toma valores positivos en el eje de las x, eso es lo que quiere decir la primera propiedad.

3. Funciones trigonométricas

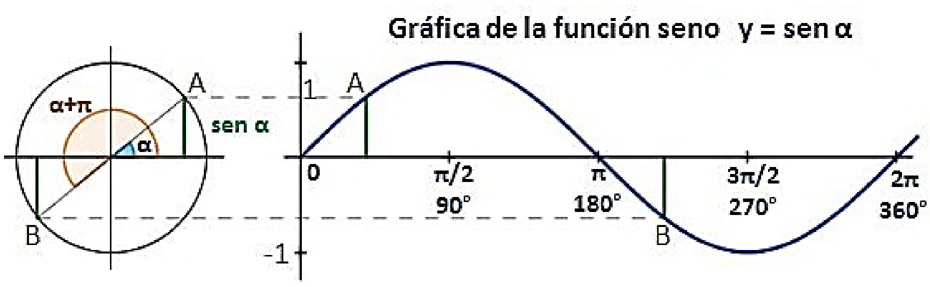
Las **funciones trigonométricas** *f* son aquellas que están asociadas a una razón trigonométrica.

Recuerda que: Las **razones trigonométricas** de un ángulo α son las obtenidas entre los tres lados de un triángulo rectángulo. Es decir, las comparaciones por su cociente de sus tres lados *a*, *b* y *c*.
Existen seis **funciones trigonométricas**:



- **Función coseno:** El seno de un ángulo α se define como la razón entre el cateto opuesto (a) y la hipotenusa (c).

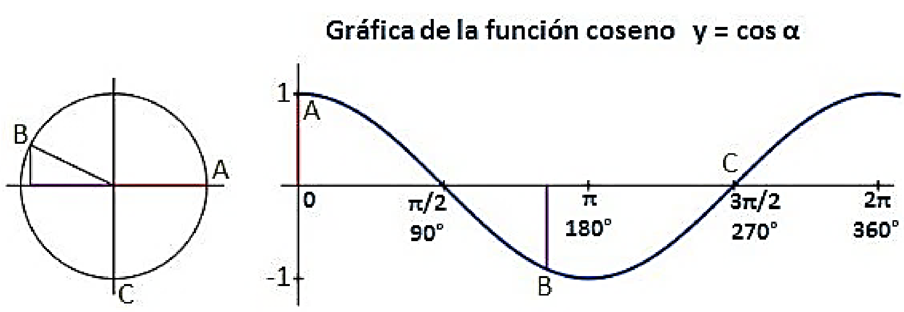
$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{a}{c}$$



Características:
- Es una función **periódica** de período 360º (2π radianes), por lo que esta sección de la gráfica se repetirá en los diferentes períodos.
- Dominio: $\mathbb{R}$
- Rango: [-1, 1]
- Es una función impar ya que *sen (-x) = - sen (x).*

- **Función seno:** El **coseno** de un **ángulo α** se define como la **razón** entre el cateto adyacente (*b*) y la hipotenusa (*c*).

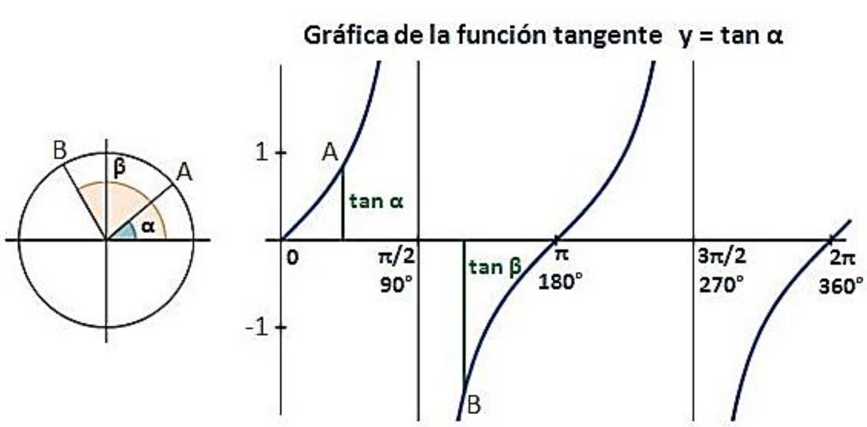
$$\cos \alpha = \frac{cateto\ contiguo}{hipotenusa} = \frac{b}{c}$$



Características:
- Es una función **periódica** de período 360º (2π radianes).
- Dominio: $\mathbb{R}$
- Rango: [-1, 1]
- Es una función par ya que *cos (-x) = cos (x).*

- **Función tangente:** La tangente de un ángulo α es la razón entre el cateto opuesto (a) y el cateto adyacente (b).

$$\tan \alpha = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ contiguo} = \frac{a}{b}$$



Características:
- Es una función **periódica** de período 180º (π radianes).
- Dominio: $\mathbb{R}$ (excepto π/2 + <u>a</u> · π), siendo <u>a</u> un número entero.
- Rango: $\mathbb{R}$

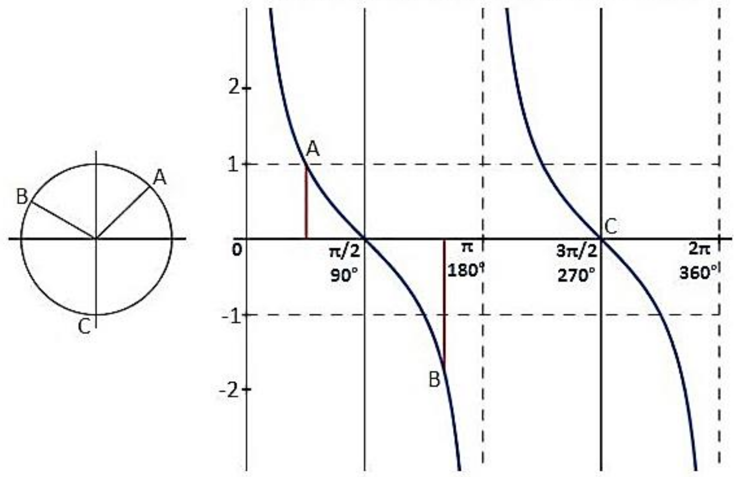
- **Función cotangente:** La cotangente es la razón trigonométrica recíproca de la tangente, por lo tanto: tan α · cot α = 1.

  La cotangente de un ángulo α de un triángulo rectángulo se define como la razón entre el cateto adyacente (b) y el cateto opuesto (a).

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{cateto\ contiguo}{cateto\ opuesto} = \frac{b}{a}$$

  Su abreviatura es ***cot***, ***cotg*** o ***cotan***.

Gráfica de la función cotangente y = cot α

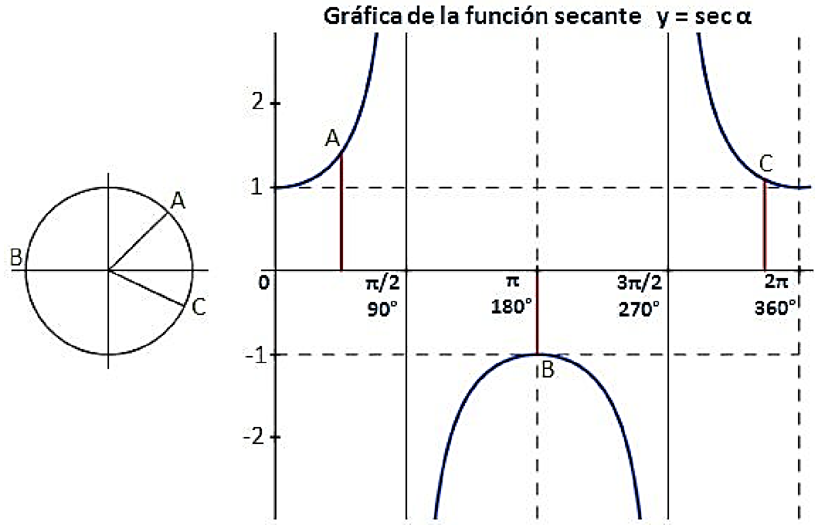


Características:
- Es una función **periódica** de período 180º (π radianes).
- Dominio: ℝ (excepto (excepto a · π), siendo a un número entero.
- Rango: ℝ

- **Función secante:** La secante es la razón trigonométrica recíproca del coseno, es decir sec α · cos α=1.
  La secante de un ángulo α de un triángulo rectángulo se define como la razón entre la hipotenusa (*c*) y cateto adyacente (*b*).
  Su abreviatura es *sec*.

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{hipotenusa}{cateto\ contiguo} = \frac{c}{b}$$

Gráfica de la función secante y = sec α

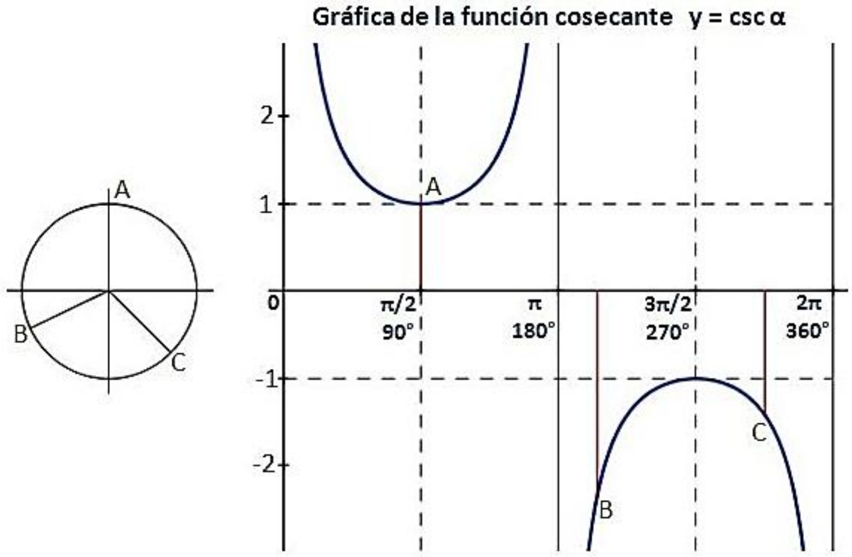


Características:
- Es una función **periódica** de período 360º (2π radianes).
- Dominio: ℝ ((excepto π/2 + a · π), siendo a un número entero.
- Rango: ℝ

- **Función cosecante:** la cosecante es la razón trigonométrica recíproca del seno, es decir
  csc α **.** sen α = 1.
  La cosecante del ángulo α de un triángulo rectángulo se define como la razón entre la hipotenusa (c) y el cateto opuesto (a).
  Su abreviatura es ***csc*** o ***cosec.***

$$\csc\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto} = \frac{c}{a}$$

Gráfica de la función cosecante y = csc α



Características:
- Es una función **periódica** de período 360º (2π radianes).
- Dominio: ℝ ((excepto π/2 + a · π), siendo a un número entero.
- Rango: ℝ

FUNCIONES ESPECIALES: Algunas funciones no están descritas solamente por una expresión algebraica o algunas otras no presentan una gráfica con un trazo continuo, tales funciones requieren un tratamiento especial por lo cual se estudian de manera independiente. Este tipo de funciones son:

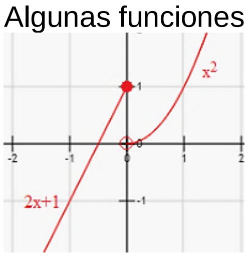
1. **Funciones definidas a trozos**

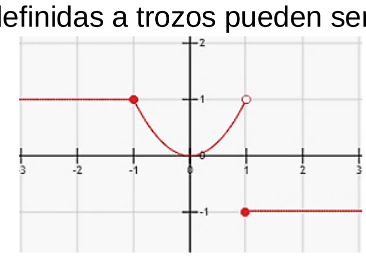
Una función formada por la unión de dos o más funciones, cada una de ellas definida en intervalos disyuntos, recibe el nombre de **función segmentada o función a trozos.**

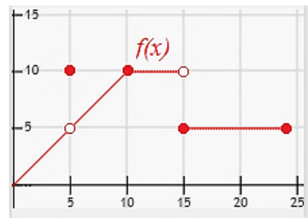
Estas funciones están definidas aplicando diferentes fórmulas a distintas partes de su dominio, por ejemplo:

$$y = f(x) = \begin{cases} 20 + 5x, \text{ si } 0 < x < 50 \\ 20 + 4{,}5x, \text{ si } 50 \leq x < 100 \\ 25 + 4x, \text{ si } x \geq 100 \end{cases}$$

Algunas funciones definidas a trozos pueden ser:







2. **Función valor absoluto**

La **función valor absoluto** se puede considerar como una función definida a trozos. Esta función asigna a cada número real del dominio su valor absoluto, y está definida por:

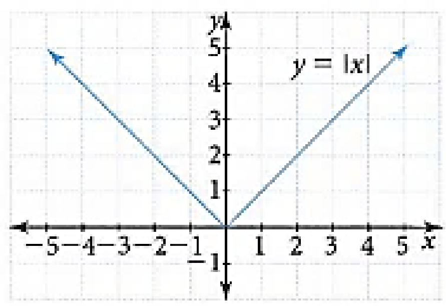
$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } -x < 0 \end{cases}$$

El dominio de la función es el conjunto de los números reales:

$$\text{Dom } f = \mathbb{R}.$$

El rango de la función es el conjunto de los números reales no negativos. Es decir, Ran $f = [0, \infty)$.

La gráfica de la función valor absoluto es:



Nota que esta función siempre toma valores positivos en el eje de las Y.

3. **Función parte entera**

La función que asigna a cada elemento del dominio el mayor entero, menor o igual que él, recibe el nombre de **función parte entera**. Es decir,

$$f(x) = \|x\| = n \text{ si } n \in \mathbb{Z} \text{ y } n \leqslant x < n + 1$$

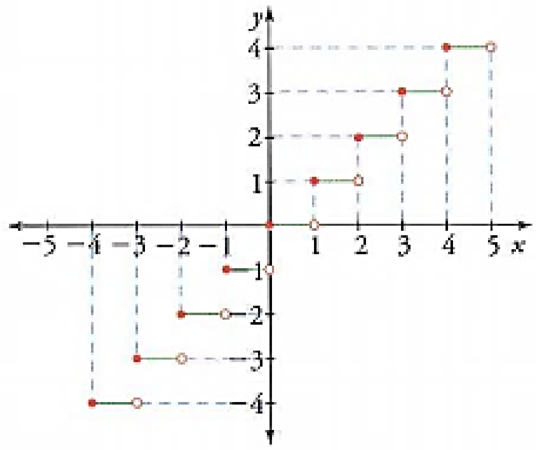
Esta función se define de los números reales a los números enteros, es decir, Dom $f = \mathbb{R}$ y Ran $f = \mathbb{Z}$.

Algebraicamente, la función parte entera se define así:

$$f(x) = \|x\| = \begin{cases} -2 & \text{si } -2 \leqslant x < -1 \\ -1 & \text{si } -1 \leqslant x < 0 \\ 0 & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leqslant x < 2 \\ 2 & \text{si } 2 \leqslant x < 3 \end{cases}$$

En forma similar para todos los números reales.

La gráfica de la función parte entera es:



"ASESORIA: si tiene alguna duda o no entiende algo sobre esta guía, comuníquese con el número que aparece en la parte de arriba"

PRACTIQUEMOS- ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE 1

1. Analiza y comprende el siguiente ejercicio resuelto:Sea la función $y = x^2 - 4$. Encontrar la gráfica de la función, dominio, rango, puntos de corte con los ejes coordenados y determinar si es par o impar.

Paso 1: Para generar la gráfica $y = x^2 - 4$ partimos de la función $y = x^2$. Trasladandola 4 unidades hacia abajo como lo muestra la imagen 7.

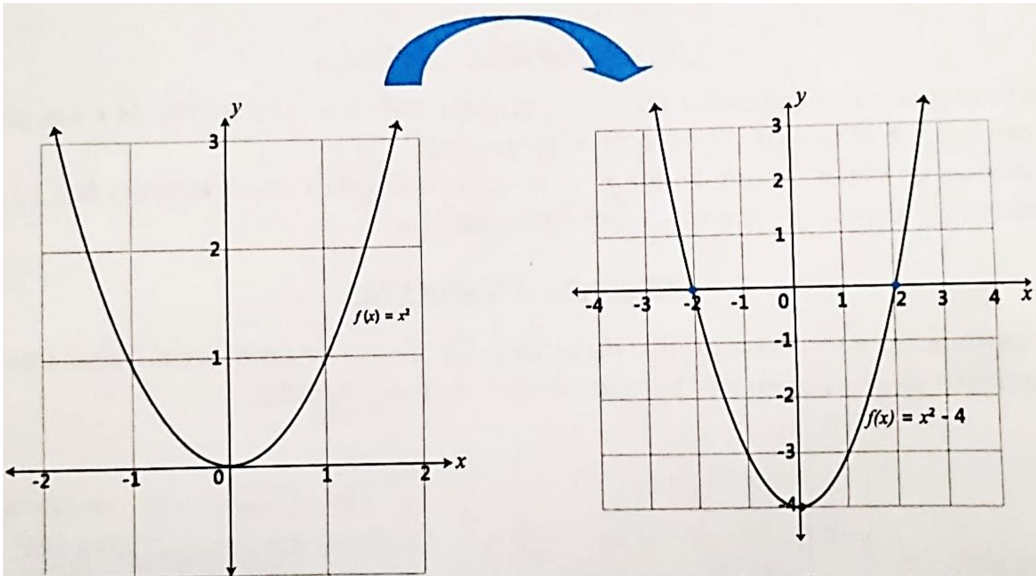
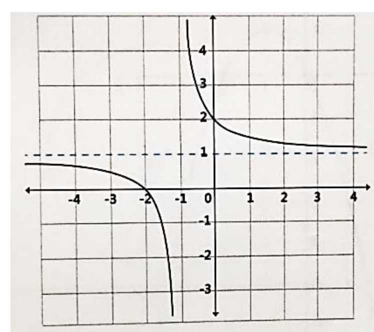


Imagen 7: traslación vertical de una función de segundo grado.

Paso 2: El dominio son todos los valores que puede tomar la variable *x*. En este caso, el dominio de la función son todos los números reales (R) porque es una función cuadrática.
Paso 3: El rango son todos los valores que toma la variable *y*. Al observar la gráfica mostrada en la imagen 7 el rango de la función es el intervalo [-4, ∞) .
Paso 4: Por ser una función cuadrática presenta dos puntos de corte con el eje de las x, (-2,0) y (2,0). Además, corta al eje de las *y* en el punto (-4, 0).
Paso 5: Para conocer si la función es par o impar encontramos *f(-x)* como se muestra a continuación:

Reemplazamos ppor -x donde esta x: $f(-x) = (-x)^2 - 4 = y = x^2 - 4 = f(x)$

Entonces, como *f(-x)= f(x)* corresponde a una función par.



2. Observa las caracteristicas de la siguiente gráfica e indica cómo se comporta:
   A. Dominio y Rango
   B. Intervalos de crecimiento y decrecimiento
   C. Corte con los ejees
   D. Asíntotas (tiene o no, si tiene cuáles son)
   E. Discontinuidad

3. Asocia a cada una de las gráficas las expresiones analíticas correspondiente. Escribe en el parentesis la letra correspondiente.
   1. $y = (x + 1)^2$ ( )
   2. $y = -x^2 + 1$ ( )
   3. $y = -x + 2$ ( )